Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste (Versão A) 9 de Novembro de 2019

LEGM, MEC

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(3,0) **I.** Sejam f e g duas funções reais de variável real definidas pelas expressões

$$f(x) = \arccos\left(\frac{x^2-1}{8}\right), \qquad g(x) = \sqrt[6]{|x|(2-|x-4|)},$$

e considere o conjunto $A = D_f \cap D_g$.

a) Mostre que $A = [2,3] \cup \{0\}$.

Resolução:
Como o domínio da função arccos é $[-1,1]$, temos que $x \in D_f$ sse,

$$-1 \leqslant \frac{x^2-1}{8} \leqslant 1 \quad \Leftrightarrow \quad -8 \leqslant x^2 - 1 \leqslant 8 \quad \Leftrightarrow \quad -7 \leqslant x^2 \leqslant 9 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \leqslant 9,$$

dado que a desigualdade $-7 \leqslant x^2$ é universal. Podemos então concluir que,

$$D_f = [-3,3].$$

Como o domínio da função raiz sexta é $[0,+\infty[$, temos, considerando o facto de que $|x| \geqslant 0$, que $x \in D_g$ sse,

$$|x| = 0 \ \vee \ 2 - |x-4| \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ |x-4| \leqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ -2 \leqslant x - 4 \leqslant 2$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ 2 \leqslant x \leqslant 6,$$

e,portanto,

$$D_g = [2,6] \cup \{0\}.$$

Conclui-se então que

$$A = [-3,3] \cap ([2,6] \cup \{0\}) = [2,3] \cup \{0\}.$$

b) Determine quando existam ou justifique que não existem, o ínfimo, supremo, mínimo e máximo de A e $A \setminus \mathbb{Q}$.

Resolução:
Uma vez que o conjunto dos minorantes de A é $]-\infty,0]$ e o dos majorantes é $[3,+\infty[$, temos que, $\inf A = 0$, $\sup A = 3$, $\min A = 0$, $\max A = 3$.
Como o conjunto dos minorantes de $A \setminus \mathbb{Q}$ é $]-\infty,2]$ e dos majorantes é $[3,+\infty[$ podemos concluir que $\inf(A \setminus \mathbb{Q}) = 2$ e $\sup(A \setminus \mathbb{Q}) = 3$. Já $\max(A \setminus \mathbb{Q})$ e $\min(A \setminus \mathbb{Q})$ não existem porque, uma vez que $2 \in \mathbb{Q}$ e $3 \in \mathbb{Q}$, deduz-se que $\inf(A \setminus \mathbb{Q}) \notin A \setminus \mathbb{Q}$ e $\sup(A \setminus \mathbb{Q}) \notin A \setminus \mathbb{Q}$.

(2,5) **II.** Considere a sucessão (u_n) definida por recorrência por

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = u_n + \sqrt{u_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Prove, usando o método de indução matemática, que, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant \dfrac{(n+1)^2}{9}$.

Resolução:

Pretende-se provar que, para qualquer número natural n, é verdadeira a proposição $P(n)$ que consiste na desigualdade $u_n \geqslant \frac{(n+1)^2}{9}$.

Para $n = 1$, tem-se $u_1 \geqslant \dfrac{4}{9} \Leftrightarrow 1 \geqslant \dfrac{4}{9}$, que se trata de uma proposição verdadeira, ficando provada a veracidade de $P(1)$.

Admitamos agora que, para algum $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \frac{(n+1)^2}{9}$ (hipótese de indução $P(n)$). Mostremos que isso implica que $u_{n+1} \geqslant \frac{(n+2)^2}{9}$ (tese de indução):

$$u_n \geqslant \frac{(n+1)^2}{9} \quad \Rightarrow \quad u_{n+1} = u_n + \sqrt{u_n} \geqslant \frac{(n+1)^2}{9} + \frac{n+1}{3} = \frac{n^2+5n+4}{9}$$
$$\geqslant \frac{n^2+4n+4}{9} = \frac{(n+2)^2}{9}\,,$$

como se pretendia provar.

(3,5) **III.** Calcule, caso exista, ou justifique porque não existe o limite em $\overline{\mathbb{R}}$ de cada uma das seguintes sucessões:

$$\text{a)} \quad u_n = \frac{(-n)^n + n^5}{2n! + 10^n + n^{10}}\,, \qquad \text{b)} \quad v_n = \frac{\sqrt{n^3+1}\,\operatorname{sen}(n^2)}{n^2}\,, \qquad \text{c)} \quad z_n = \frac{n^n (n!)^2}{(3n)!}\,.$$

Resolução:

a)
$$u_n = \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{(-1)^n + \frac{n^5}{n^n}}{2 + \frac{10^n}{n!} + \frac{n^{10}}{n!}}\,.$$

Pela escala de sucessões,

$$\frac{n^n}{n!} \to +\infty\,, \qquad \frac{n^5}{n^n} \to 0\,, \qquad \frac{10^n}{n!} \to 0\,, \qquad \frac{n^{10}}{n!} \to 0\,.$$

Assim, tomando a subsucessão correspondente às ordens n pares, teremos,

$$u_n = \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{1 + \frac{n^5}{n^n}}{2 + \frac{10^n}{n!} + \frac{n^{10}}{n!}} \quad \to \quad +\infty \cdot \frac{1}{2} = +\infty\,,$$

enquanto que, tomando a subsucessão correspondente às ordens n ímpares, teremos,

$$u_n = \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{-1 + \frac{n^5}{n^n}}{2 + \frac{10^n}{n!} + \frac{n^{10}}{n!}} \quad \to \quad +\infty \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\infty\,.$$

Uma vez que (u_n) tem dois sublimites diferentes em $\overline{\mathbb{R}}$, conclui-se que não tem limite, ou seja, é divergente em $\overline{\mathbb{R}}$.

b) Dado que $-1 \leqslant \operatorname{sen}(n^2) \leqslant 1$, temos o enquadramento,

$$-\frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2} \leqslant v_n \leqslant \frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2}\,.$$

Como,

$$\frac{\sqrt{n^3+1}}{n^2} = \sqrt{\frac{n^3+1}{n^4}} = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^4}} \quad \to \quad 0\,,$$

conclui-se que (v_n) está enquadrada por duas sucessões que tendem para 0 e, logo,

$$v_n \to 0.$$

c) A sucessão (z_n) é o quociente de duas sucessões estritamente positivas. Calculemos $\lim \frac{z_{n+1}}{z_n}$ (se existir):

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{(n+1)^{n+1}((n+1)!)^2}{(3(n+1))!} \cdot \frac{(3n)!}{n^n (n!)^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{(1+\frac{1}{n})^3}{(3+\frac{1}{n})(3+\frac{2}{n})(3+\frac{3}{n})} \quad \to \quad e\cdot\frac{1}{27} < 1\,.$$

Conclui-se então que $z_n \to 0$.

(2,5) **IV.** a) Calcule o seguinte limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(2x)\right)^x$$

Resolução:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(2x)\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(2x)\right)}.$$

No lado esquerdo temos uma indeterminação do tipo 1^∞ enquanto que no lado direito temos uma do tipo $\infty.0$ transformável numa do tipo $\frac{0}{0}$ à qual, para a resolver, aplicaremos a regra de Cauchy:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(2x)\right) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(2x)\right)}{\frac{1}{x}} \overset{RC}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(2x)\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}\\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{(1+4x^2)\operatorname{arctg}(2x)}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{(1+4x^2)\operatorname{arctg}(2x)}\\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\pi} = -\frac{1}{\pi}\,.
\end{aligned}$$

Concluimos que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(2x)\right)^x = e^{-\frac{1}{\pi}}.$$

b) Seja (u_n) uma sucessão tal que $u_n \geqslant n$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Justifique porque a sucessão seguinte é convergente e diga qual é o seu limite:

$$\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(2u_n)\right)^{u_n}.$$

Resolução:
Sabemos que $\forall n,\ u_n \geqslant n$ implica $u_n \to +\infty$. Seja $f(x) = \left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}(2x)\right)^x$. Pela definição de limite à Heine e pelo resultado da alínea a) concluimos que $f(u_n)$ é convergente e $f(u_n)\to e^{-\frac{1}{\pi}}$, que é o limite pretendido.

(6,5) **V.** Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} x^6+3x^2-4, & \text{se } x\leqslant 1,\\ (x-1)e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}, & \text{se } x>1.\end{cases}$$

a) Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Resolução:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^6+3x^2-4) = \lim_{x\to-\infty} x^6\left(1+\frac{3}{x^4}-\frac{4}{x^6}\right) = +\infty\cdot 1 = +\infty\,,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x-1)e^{-\frac{1}{(x-1)^2}} = +\infty\cdot e^0 = +\infty\cdot 1 = +\infty\,.$$

b) Estude a continuidade de f no ponto $x = 1$.

Resolução:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 1^6 + 3\cdot 1^2 - 4 = 0$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x-1)e^{-\frac{1}{(x-1)^2}} = 0\cdot e^{-\infty} = 0\cdot 0 = 0\,.$$

Dado que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$ concluimos que f é contínua no ponto $x = 1$.

c) Determine, justificando, o domínio de diferenciabilidade de f e calcule a função derivada.

Resolução:
Calculemos as derivadas laterais no ponto $x = 1$:

$$f'_e(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^6+3x^2-4}{x-1} \overset{RC}{=} \lim_{x\to 1^-} \frac{6x^5+6x}{1} = 12\,,$$
$$f'_d(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} e^{-\frac{1}{(x-1)^2}} = e^{-\infty} = 0\,.$$

Dado que $f'_e(1) \neq f'_d(1)$ concluimos que f não é diferenciável em $x = 1$.
Como, para x no intervalo aberto $]-\infty, 1[$, $f(x)$ coincide com uma função polinomial, conclui-se que neste intervalo f é diferenciável.
Como, para x no intervalo aberto $]1, +\infty[$, $f(x)$ coincide com o produto de uma função polinomial com a composta da exponencial com uma função racional, todas funções diferenciáveis nos seus domínios, concluimos que, neste intervalo aberto f é diferenciável. Logo, o domínio de diferenciabilidade de f será

$$D_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{1\}\,,$$

e

$$f'(x) = \begin{cases} 6x^5+6x\,, & \text{se } x<1\,,\\ \left(1+\dfrac{2}{(x-1)^2}\right)e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}\,, & \text{se } x>1\,. \end{cases}$$

d) Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais de f. Terá f extremos absolutos?

Resolução:
Procuremos os zeros de $f'(x)$:
Para $x < 1$, $f'(x) = 6x(x^4+1)$ e, portanto, $f'(x) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad x = 0$.
Para $x > 1$, $f'(x)$ é estritamente positiva e, portanto, não tem zeros.
Tem-se então:
Em $]-\infty, 0[$, $f' < 0$ e, logo, f é estritamente decrescente.
Em $]0, 1[$, $f' > 0$ e, logo, f é estritamente crescente.
Em $]1, +\infty[$, $f' > 0$ e, logo, f é estritamente crescente.
De facto, como f é contínua, podemos dizer que f é estritamente crescente em $]0, +\infty[$.
Quanto aos extremos locais, podemos afirmar que f tem um mínimo local em $x = 0$, $f(0) = -4$, e não tem máximos locais. Tendo em atenção a continuidade e os intervalos de monotonia de f, podemos concluir que, tanto para $x < 0$ como para $x > 0$, $f(x) > -4$. Logo, $f(0) = -4$ é um mínimo absoluto. Como f não tem máximos locais, também não poderá ter máximo absoluto.

e) Diga, justificando, o número exacto de zeros da função f.

Resolução:

Dado que f é estritamente crescente em $]0, +\infty[$ e que $f(1) = 0$, podemos afirmar que este é o único zero de f neste intervalo. Por outro lado, como em $]-\infty, 0[$ a função f é diferenciável e $f' < 0$, como consequência do teorema de Rolle, podemos afirmar que, neste intervalo, não pode existir mais do que um zero de f. Como $f(-1) = 0$, este é o único zero de f neste intervalo. Logo, f tem exatamente dois zeros.

(2,0) **VI.** Considere uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) > x^2 .$$

Mostre que existe $c \geqslant 0$, tal que $[c, +\infty[$ é o contradomínio de f.

Resolução:

Como f é contínua em $\mathbb{R}$, como consequência do Teorema de Bolzano, f transforma intervalos em intervalos e, logo, $f(\mathbb{R})$ é um intervalo.

Por outro lado, dado $M > 0$ arbitrariamente grande, se $|x| > \sqrt{M}$ então, por hipótese, $f(x) > x^2 > M$. Concluimos assim que $f(\mathbb{R})$ não é majorado.

Para provar que existe $c = \min f(\mathbb{R})$, escolha-se, para a constante considerada no parágrafo anterior, o valor $M = f(0)$. Como f é contínua em $\mathbb{R}$, podemos aplicar o Teorema de Weierstrass ao intervalo fechado e limitado $[-\sqrt{M}, \sqrt{M}]$, concluindo que existe $a \in [-\sqrt{M}, \sqrt{M}]$ tal que $c = f(a) = \min f([-\sqrt{M}, \sqrt{M}])$. Como $f(a) > a^2$ temos que $c \geqslant 0$. Mas, se $|x| > \sqrt{M}$, vimos que $f(x) > M = f(0)$ e, por definição de mínimo, $f(0) \geqslant c$. Logo, para $x \in \mathbb{R} \setminus [-\sqrt{M}, \sqrt{M}]$, $f(x) \geqslant c$. Provámos assim que

$$c = \min f(\mathbb{R}).$$

Conclusão: $f(\mathbb{R})$ é um intervalo não majorado com mínimo c, logo, é $[c, +\infty[$.