TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste (Versão A) 8 de Novembro de 2014

Licenciatura em Engenharia Informática e de Computadores - Alameda

---

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(2,0) **I.** Considere os conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| \geq 1\}, \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{2}{e^x - 1} \leq 0\right\}, \qquad C = (A \cap B).$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que

$$C = \left]-\infty, 0\right[.$$

Resolução:

$$|x-2| \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 1 \;\vee\; x \geq 3 \qquad\qquad e \qquad\qquad \frac{2}{e^x-1} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 0$$

pelo que $A = \left]-\infty, 1\right] \cup \left[3, +\infty\right[$ e $B = \left]-\infty, 0\right[$. Logo $C = \left]-\infty, 0\right[$.

b) Determine, se existirem, $\inf C$, $\sup C$, $\max C$, $\sup\, (C \cap \mathbb{Q})$ e $\max\, (C \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$.

Resolução: $\sup C = \sup\, (C \cap \mathbb{Q}) = 0$ e não existem $\inf C$, $\max C$ e $\max\, (C \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Qualquer sucessão decrescente de termos em C tem limite (em $\mathbb{R}$).
(ii) Qualquer sucessão de termos em C tem um sublimite em $\mathbb{R}$.
(iii) Qualquer sucessão crescente de termos em C tem limite em C.

Resolução:
(i) Proposição falsa: por ex., $u_n = -n$.
(ii) Proposição falsa: por ex., $u_n = -n$.
(iii) Proposição falsa: por ex., $u_n = -1/n \to 0 \notin C$.

(1,5) **II.** Por indução, mostre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$,

$$-1 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \ldots + (-1)^n\, n^2 = (-1)^n\, \frac{n(n+1)}{2} \quad .$$

Resolução: Como $-1 = -1\frac{(1+1)}{2} = -1$, a condição é verdadeira para $n = 1$. Admitamos agora que a condição é verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}_1$. Provemo-la para $n+1$. Tem-se

$$-1 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \ldots + (-1)^n\, n^2 + (-1)^{n+1}\,(n+1)^2 = (-1)^n\, \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1}\,(n+1)^2 =$$

$$= (-1)^{n+1}(n+1)\, \frac{2(n+1)-n}{2} = (-1)^{n+1}\, \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad ,$$

e portanto a condição é verdadeira para qualquer $n \in \mathbb{N}_1$.

(2,5) **III.** Calcule, ou mostre que não existem, os seguintes limites:

$$\text{a)} \lim \sqrt{\frac{2n+1}{4n+7}} \qquad \text{b)} \lim \sqrt[n]{\frac{n^5}{n!+1}} \qquad \text{c)} \lim \frac{10^n+5}{n!+10}$$

$$\text{d)} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\cos x}{(x+1)^2} \qquad \text{e)} \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$$

Resolução:

a) $\lim \sqrt{\frac{2n+1}{4n+7}} = \lim \sqrt{\frac{2+1/n}{4+7/n}} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) Queremos calcular $\lim \sqrt[n]{a_n}$ com $a_n = \frac{n^5}{n!+1}$. Ora, como

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^5}{(n+1)!+1}\frac{n!+1}{n^5} = \frac{(n+1)^5}{n^5}\frac{n!+1}{(n+1)!+1} = \frac{(n+1)^5}{n^5}\frac{1/(n+1)+1/(n+1)!}{1+1/(n+1)!} \to 0\,,$$

vem $\lim \sqrt[n]{a_n} = 0$. pois $|\cos(n\pi)| \leq 1$ e $1/n^2$ é um infinitésimo.

c) $\lim \frac{10^n+5}{n!+10} = \lim \frac{10^n/n!+5/n!}{1+10/n!} = 0$.

d) Considerem-se as sucessões $x_n = 2n\pi$ e $y_n = (2n+1)\pi$. Então, $x_n \to +\infty$ e $y_n \to +\infty$ e

$$\frac{x_n^2\cos x_n}{(x_n+1)^2} = \frac{x_n^2}{(x_n+1)^2} = \frac{1}{(1+\frac{1}{x_n})^2} \to 1\,, \qquad \frac{y_n^2\cos y_n}{(y_n+1)^2} = \frac{-y_n^2}{(y_n+1)^2} = \frac{-1}{(1+\frac{1}{y_n})^2} \to -1\,.$$

Como os limites destas sucessões são diferentes, concluimos que não existe o limite de f em $+\infty$.

e) $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = 0^{+\infty} = 0$.

(3,0) **IV.** Considere a função $f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \log(\log x), & \text{se } x > 1, \\ \operatorname{arctg}(x^2), & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

a) Estude f quanto à continuidade.

Resolução: O domínio é a união de dois intervalos abertos disjuntos, e em cada um deles f é a composta de funções contínuas, sendo portanto contínua.

b) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Resolução:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}(x^2) = \pi/2 \;\; e \;\; \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \log(\log x) = +\infty \;\; .$$

c) Será f prolongável por continuidade ao ponto 1? Justifique.

Resolução:A função será prolongável por continuidade ao ponto 1 se existir $\lim_{x\to 1} f(x)$ (em $\mathbb{R}$). Ora, como $\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} \log(\log x) = -\infty$, não existe $\lim_{x\to 1} f(x)$.

d) Calcule a função derivada f'.

Resolução: Tem-se $f' : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$, dada por

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\log x}, & \text{se } x > 1, \\ \dfrac{2x}{1+x^4}, & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

(1,0) **V.** Seja f uma função contínua em $I = [0, +\infty[$ tal que

$$f(0) > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

Mostre que a função dada por $g(x) = \max f([0, x])$ está definida para todo $x \in I$ e que existe $L \geqslant 0$ tal que g é constante no intervalo $[L, +\infty[$.

Resolução: Para cada $x \in \mathbb{R}^+$ a função f é contínua no intervalo $[0, x]$ e portanto, pelo terorema de Weiertstrass, existe $g(x) = \max f([0, x])$.
Por outro lado é evidente, pela definição de valor máximo e pelas hipóteses, que $g(x) \geqslant f(0) > 0$. Mas, por definição de limite, a hipótese $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ garante que existe $L \geqslant 0$ tal que, se $x > L$ então $f(x) < f(0)$. Logo, para todo $x \geqslant L$, o máximo de f em $[0, x]$ é atingido num ponto de $[0, L]$, ou seja, $g(x) = g(L)$.