Cálculo Diferencial e Integral I

1º Teste (Versão A) 8 de Novembro de 2014

Licenciatura em Engenharia Informática e de Computadores - Alameda

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(2,0) **I.** Considere os conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x-2| \geqslant 1\}, \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{2}{e^x - 1} \leqslant 0\right\}, \qquad C = (A \cap B).$$

a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que

$$C = \left]-\infty, 0\right[.$$

b) Determine, se existirem, $\inf C$, $\sup C$, $\max C$, $\sup\,(C \cap \mathbb{Q})$ e $\max\,(C \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$.

c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(i) Qualquer sucessão decrescente de termos em C tem limite (em $\mathbb{R}$).

(ii) Qualquer sucessão de termos em C tem um sublimite em $\mathbb{R}$.

(iii) Qualquer sucessão crescente de termos em C tem limite em C.

(1,5) **II.** Por indução, mostre que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

$$-1 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - \ldots + (-1)^n\, n^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}\ .$$

(2,5) **III.** Calcule, ou mostre que não existem, os seguintes limites:

a) $\lim \sqrt{\dfrac{2n+1}{4n+7}}$ b) $\lim \sqrt[n]{\dfrac{n^5}{n!+1}}$ c) $\lim \dfrac{10^n + 5}{n! + 10}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \cos x}{(x+1)^2}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$

(3,0) **IV.** Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \ln(\ln x), & \text{se } x > 1, \\ \operatorname{arctg}(x^2), & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

a) Estude f quanto à continuidade.

b) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Será f prolongável por continuidade ao ponto 1? Justifique.

d) Calcule a função derivada f'.

(1,0) **V.** Seja f uma função contínua em $I = [0, +\infty[$ tal que

$$f(0) > 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Mostre que a função dada por $g(x) = \max f([0,x])$ está definida para todo $x \in I$ e que existe $L \geqslant 0$ tal que g é constante no intervalo $[L, +\infty[$.