

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

Para realizar o exame responda a todas as questões. Para realizar o 1º Teste responda aos grupos **I** a **V**. Para realizar o 2º teste responda aos grupos **VI** a **XII**.

1º Teste

(2,0) **I.** Considere os conjuntos:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : ||x| + 1| \leq \sqrt{2} + 1 \right\}, \quad B = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x+1}{e^x - e} > 0 \right\}, \quad C = A \cap B.$$

- a) Identifique os conjuntos A e B e mostre que $C = [-\sqrt{2}, -1[\cup]1, \sqrt{2}]$.
- b) Determine, se existirem, $\inf C$, $\sup C$, $\max C$, $\min C$ e $\max C \cap \mathbb{Q}$.
- c) Decida, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:
 - i) Existe uma sucessão de termos em C com limite 0.
 - ii) Qualquer sucessão de termos em C tem um sublimite em C .
 - iii) Qualquer sucessão (a_n) de termos em C verificando $a_n a_{n+1} < 0$ para todo n é divergente.

(2,0) **II.** Considere uma sucessão de termo geral b_n definida por

$$\begin{cases} b_1 = 1/2, \\ b_{n+1} = b_n(b_n - 1) + 1, \text{ se } n \geq 1. \end{cases}$$

- a) Mostre, usando indução, que $b_n \in]0, 1[$ para $n \geq 1$.
- b) Mostre que a sucessão é crescente.
- c) Justifique que a sucessão é convergente e determine o seu limite.

(1,8) **III.** Calcule, ou mostre que não existem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites de sucessões:

$$\text{a) } \lim \frac{\sqrt{n} + n^3}{(n + \sqrt{n})(n^2 + n^{3/2})} \quad \text{b) } \lim \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + n\pi \right) + 1 \right)^n \quad \text{c) } \lim \frac{(3n)!}{n!(2n)!}$$

(3,2) **IV.** Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{-\pi/2, \pi/2\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2(\sin x + 1)}, & \text{se } |x| < \pi/2, \\ \arctg(e^{x-\pi/2}), & \text{se } |x| > \pi/2. \end{cases}$$

- a) Estude f quanto à continuidade.
- b) Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- c) Decida se f é prolongável por continuidade a cada um dos pontos $-\pi/2$ e $\pi/2$.
- d) Calcule a função derivada f' e determine os intervalos de monotonia de f .

(1,0) **V.** Seja $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Suponha-se que existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $\{x \in \mathbb{R} : G(x) \leq m\}$ é limitado e não vazio.

Mostre que G possui um mínimo absoluto.

2º Teste

(1,6) **VI.** Calcule, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{tg} x}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2e^x + 1)^{\frac{1}{x}}$$

(1,7) **VII.** a) Calcule a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{1+x}{9+x^2} \quad \text{e} \quad f(0) = \log 3.$$

b) Escreva uma expressão geral para as primitivas em $]0, +\infty[$ de

$$\frac{1}{x\sqrt{x+1}}.$$

(1,0) **VIII.** Calculando integrais adequados determine a área do triângulo limitado pelas rectas de equação:

$$y = x, \quad y = 2x, \quad y = 3x - 2.$$

(1,6) **IX.** Calcule os seguintes integrais:

$$\text{a) } \int_0^1 \left(\frac{x}{2} + x^3\right) \operatorname{arctg} x \, dx, \quad \text{b) } \int_1^{\log 2} \frac{e^x}{\sqrt{e^x - 1}} \, dx,$$

(1,5) **X.** Seja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \int_x^{x^2} h(t) \, dt.$$

a) Mostre que $f''(1) - 2f'(1) = 3h'(1)$.

b) Se $p_1(x) = x - 1$ é o polinómio de Taylor de primeira ordem de h no ponto 1, mostre que f tem um mínimo local em $x = 1$.

(1,5) **XI.** Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a seguinte série de potências converge absolutamente, simplesmente ou diverge:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

(1,1) **XII.** Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \alpha > 0.$$

Mostre que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 e^{x-t} g(t) \, dt = \alpha.$$

Sugestão: Comece por mostrar que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^0 e^{-t} g(t) \, dt = +\infty$.