2.º TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - Versão B
LEAN, MEMat, MEQ

1.º Sem. 2016/17   9/1/2017   Duração: 1h30m

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

(3,5 val.) **1.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a)}\ \frac{1}{x(1+\ln x)}\,, \qquad \text{b)}\ \frac{(1+\sqrt{x})^{50}}{2\sqrt{x}}\,, \qquad \text{c)}\ e^x \operatorname{arctg}(e^x)\,.$$

(3,5 val.) **2.** Calcule os integrais

$$\text{a)}\ \int_0^{1/2} \frac{1}{(1+t)^2(1-t)}\,\mathrm{d}t\,, \qquad \text{b)}\ \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{(1+\cos x)\operatorname{sen} x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Sugestão: relacione b) com a) através da substituição de variável $t=\cos x$ (ainda que não resolva a)).

(2,5 val.) **3.** Determine a área do conjunto de pares ordenados (x,y) que satisfazem simultaneamente,

$$x \geqslant 0\,, \qquad y \leqslant 3x\,, \qquad y \leqslant 3x^2\,, \qquad y \geqslant x^2-4\,.$$

(4,0 val.) **4.** Seja $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função positiva e de classe C^1. Seja $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x) = (x^4+1)\int_0^{x^2} \frac{h(t)}{t^2+1}\,\mathrm{d}t\,.$$

a) Calcule as funções f' e f'' explicitando os seus domínios.

b) Mostre que f tem extremo em 0 e classifique-o.

c) Se os conjuntos imagem $h([-1,1])$ e $h'([-1,1])$ estão contidos em $[-1,1]$, mostre que, se $|x|\leqslant 1$, então,

$$|f(x)| \leqslant 13x^2.$$

Sugestão: estude o resto de Lagrange da fórmula de Taylor de primeira ordem em 0.

(5,0 val.) **5.** a) Classifique cada uma das séries seguintes em absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente. Calcule a soma de uma delas.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^{n-1}}{3^{2n}}\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(\sqrt{n}+1)^2}.$$

b) Determine os valores de x para os quais a seguinte série de potências é absolutamente convergente, simplesmente convergente e divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{2n-1}\,.$$

(1,5 val.) **6.** Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua e φ o seu integral indefinido com ponto base $c\in\mathbb{R}$. Mostre que, dado um intervalo $I=[a,b]$ com $-\infty<a<b<+\infty$, existe uma constante $L(I)>0$, tal que,

$$\forall_{x,y\in I} \quad |\varphi(x)-\varphi(y)| \leqslant L(I)|x-y|\,.$$