Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

2.º TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - Versão B

MEBiol, MEAmbi

1.º Sem. 2015/16 4/1/2016 Duração: 1h30m

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

(3,0 val.) **1.** Calcule os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\arccos\frac{1}{x}\right)^x$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}(e^{t^2}-1)\,dt}{\int_0^x t\,\mathrm{sen}(t^4)dt}$

(4,5 val.) **2.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $e^{2x}\sqrt{e^{2x}+1}$ b) $\dfrac{1}{(1+x^2)\,\mathrm{arctg}\,x}$ c) $x^{-3}\ln(1+x^4)$

(3,0 val.) **3.** a) Calcule o integral

$$\int_1^e \frac{1-2t+t^2}{(1+t^2)t}\mathrm{d}t\,.$$

b) Determine a área da região plana

$$D=\left\{(x,y): 2\leqslant x\leqslant 1+e^2\ \wedge\ 0\leqslant y\leqslant \frac{x-2\sqrt{x-1}}{2x(x-1)}\right\}$$

(Sugestão: Pode-lhe ser útil usar a alínea a).)

(2,5 val.) **4.** Seja $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função positiva e diferenciável. Seja $\phi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função definida por:

$$\psi(x)=\int_0^{\cos x} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

a) Justifique que ψ é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e calcule ψ' e ψ''.

b) Determine e classifique os extremos de ψ.

(4,5 val.) **5.** Classifique cada uma das séries seguintes em absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n^2+3)2^n}{(n+1)5^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n-\ln n}{\sqrt{n+n^4}}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(7n+3)}$.

(2,5 val.) **6.** Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, duas vezes diferenciável, tal que $f(0)=f'(0)=0$ e $f''(x)\geqslant 0$ para todo $x>0$.

a) Use o Teorema de Lagrange para mostrar que

$$\forall x>0,\quad \frac{1}{x}\,\mathrm{arctg}\,f(x)\leqslant f'(x)\,.$$

b) Seja g a função contínua em $\mathbb{R}$ tal que, para $x\neq 0$, $g(x)=\frac{1}{x}\,\mathrm{arctg}\,f(x)$. Mostre que

$$\forall x>0,\quad \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\leqslant f(x)\,.$$