TÉCNICO LISBOA

2.º TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - Versão A
LEAN, MEMat, MEQ

1.º Sem. 2016/17 9/1/2017 Duração: 1h30m

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

(3,5 val.) **1.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $\dfrac{1}{x(1+(\ln x)^2)}$, b) $\dfrac{1+e^x}{2\sqrt{x+e^x}}$, c) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

a) $P\left(\dfrac{1}{x(1+(\ln x)^2)}\right) = \operatorname{arctg}(\ln x)$,

b) $P\left(\dfrac{1+e^x}{2\sqrt{x+e^x}}\right) = \sqrt{x+e^x}$,

c) Primitivando por partes:

$$P\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{arctg}\sqrt{x}\right) = \sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x} - P\left(\sqrt{x}\,\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x}\right)$$
$$= \sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{2}P\left(\frac{1}{1+x}\right) = \sqrt{x}\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\ln|1+x|\,.$$

(3,5 val.) **2.** Calcule os integrais

a) $\displaystyle\int_0^{1/2}\frac{1}{(1-t)^2(1+t)}\,\mathrm{d}t$, b) $\displaystyle\int_0^{\pi/6}\frac{1}{(1-\operatorname{sen}x)\cos x}\,\mathrm{d}x$.

Sugestão: relacione b) com a) usando a substituição de variável $t=\operatorname{sen}x$ (ainda que não resolva a)).

a) Decomposição em fracções simples da função racional integranda:

$$\frac{1}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{A}{1+t}+\frac{B}{1-t}+\frac{C}{(1-t)^2} = \frac{A(1-t)^2+B(1+t)(1-t)+C(1+t)}{(1-t)^2(1+t)}$$

Atribuindo a t, no polinómio numerador da última fracção, os valores $1, -1$ e 0, sabendo que aquele polinómio é a função constante 1, obtemos, respectivamente,

$$2C=1\,,\qquad 4A=1\,,\qquad A+B+C=1\,.$$

Logo, $C=\frac{1}{2}$, $A=\frac{1}{4}$ e $B=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$. Então,

$$\int_0^{1/2}\frac{1}{(1-t)^2(1+t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_0^{1/2}\frac{1}{1+t}\,dt+\frac{1}{4}\int_0^{1/2}\frac{1}{1-t}\,dt+\frac{1}{2}\int_0^{1/2}\frac{1}{(1-t)^2}\,dt$$
$$= \frac{1}{4}\left[\ln|1+t|\right]_{t=0}^{t=1/2}+\frac{1}{4}\left[-\ln|1-t|\right]_{t=0}^{t=1/2}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-t}\right]_{t=0}^{t=1/2}$$
$$= \frac{1}{4}\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\ln 3+\frac{1}{2}\,.$$

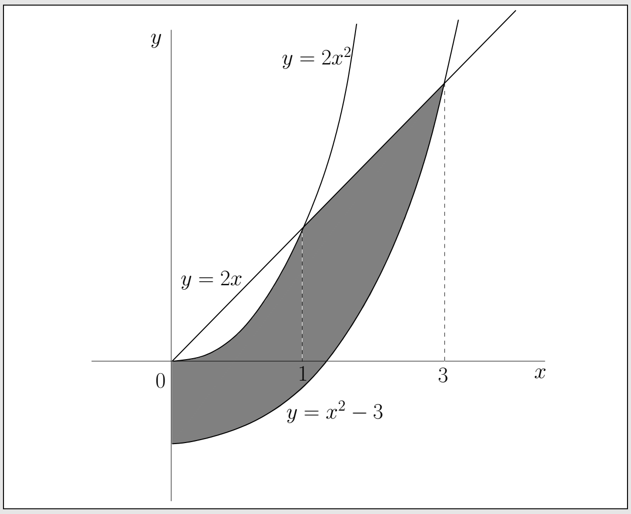
b) Fazendo $t = \operatorname{sen} x$, tem-se $x = \operatorname{arcsen} t$ e $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Logo,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/6} \frac{1}{(1-\operatorname{sen} x)\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{1/2} \frac{1}{(1-t)\sqrt{1-t^2}}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{1/2} \frac{1}{(1-t)(1-t^2)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{1/2} \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}\,\mathrm{d}t\,,\end{aligned}$$

que é precisamente o integral calculado em a).

(2,5 val.) **3.** Determine a área do conjunto de pares ordenados (x, y) que satisfazem simultaneamente,

$$x \geqslant 0\,, \qquad y \leqslant 2x\,, \qquad y \leqslant 2x^2\,, \qquad y \geqslant x^2 - 3\,.$$



Intersecção das curvas $y = 2x$ e $y = 2x^2$: $2x = 2x^2$, cuja solução positiva é $x = 1$.
Intersecção das curvas $y = 2x$ e $y = x^2 - 3$: $2x = x^2 - 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$, cuja solução positiva é $x = 3$.
Logo, a área é dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (2x^2 - (x^2-3))\,dx + \int_1^3 (2x - (x^2-3))\,dx \\ &= \int_0^1 (x^2+3)\,dx + \int_1^3 (2x - x^2 + 3)\,dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + 3x\right]_{x=0}^{x=1} + \left[x^2 - \frac{x^3}{3} + 3x\right]_{x=1}^{x=3} = \frac{10}{3} + (9 - (1 - \frac{1}{3} + 3)) = \frac{26}{3}. \end{aligned}$$

(4,0 val.) **4.** Seja $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função positiva e de classe C^1. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x) = (x^2+1)\int_0^{x^2} \frac{h(t)}{t+1}\,\mathrm{d}t\,.$$

a) Calcule as funções f' e f'' explicitando os seus domínios.

b) Mostre que f tem extremo em 0 e classifique-o.

c) Se os conjuntos imagem $h([-1,1])$ e $h'([-1,1])$ estão contidos em $[-1,1]$, mostre que, se $|x| \leqslant 1$, então,

$$|f(x)| \leqslant 6x^2.$$

Sugestão: estude o resto de Lagrange da fórmula de Taylor de primeira ordem em 0.

a) Qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$ pelo que, para todo o t entre 0 e x^2, tem-se $t+1 > 0$ e, portanto, a função integranda é contínua nesse intervalo. Como consequência do Teorema Fundamental do Cálculo, Teorema da derivada da função composta e da derivada do produto, f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e, para qualquer $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2x \int_0^{x^2} \frac{h(t)}{t+1}\,\mathrm{d}t + (x^2+1)\frac{h(x^2)}{x^2+1}(x^2)' = 2x \int_0^{x^2} \frac{h(t)}{t+1}\,\mathrm{d}t + h(x^2)2x\,.$$

Pelas mesmas razões, f' é diferenciável em $\mathbb{R}$ e, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = 2\int_0^{x^2} \frac{h(t)}{t+1}\,\mathrm{d}t + \frac{4x^2h(x^2)}{x^2+1} + 4x^2h'(x^2) + 2h(x^2)\,.$$

b) Como, atendendo às expressões calculadas em a), $f'(0) = 0$ e $f''(0) = 2h(0) > 0$, concluimos que f tem um mínimo relativo em 0.

c) Como $f(0) = f'(0) = 0$, o polinómio de Taylor de ordem 1 em 0, é $p_1(x) = 0$. Logo, como f é de classe C^2 e nesse caso, para cada $x \in \mathbb{R}$, o resto de Lagrange de ordem 1 é dado por $r_1(x) = \frac{f''(c)}{2!}x^2$, onde c é um certo valor entre 0 e x, para cada x temos, de acordo com o Teorema de Taylor,

$$|f(x)| = |p_1(x) + r_1(x)| = \frac{|f''(c)|}{2!}x^2\,.$$

Por hipótese, para todo x, $0 < h(x) \leqslant 1$, e $|h'(x)| \leqslant 1$. Além disso, para $|x| \leqslant 1$, temos $4x^2 \leqslant 4$, $\frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$, e,

$$0 \leqslant \int_0^{x^2} \frac{h(t)}{t+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{x^2} 1\,\mathrm{d}t = x^2 \leqslant 1,$$

Obtemos assim, da expressão para f'' obtida em a), que para cada $|x| \leqslant 1$, o que implica por sua vez $|c| \leqslant 1$,

$$|f''(c)| \leqslant 2.1 + 4.1 + 4.1 + 2.1 = 12\,.$$

donde resulta a desigualdade pedida.

(5,0 val.) **5.** a) Classifique cada uma das séries seguintes em absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente. Calcule a soma de uma delas:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{3^n(n!)^2}\,, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{2^{2n+1}}\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

b) Determine os valores de x para os quais a seguinte série de potências é absolutamente convergente, simplesmente convergente e divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{3n+2}\,.$$

a) A primeira série é uma série de termos positivos à qual podemos tentar aplicar o critério de d'Alembert:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{(2n+2)!}{3^{n+1}((n+1)!)^2}\,\frac{3^n(n!)^2}{(2n)!} = \frac{1}{3}\lim \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \frac{4}{3} > 1\,.$$

Logo, a série é divergente.
A segunda série pode ser reduzida a uma série geométrica:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 2\,,$$

onde se justifica a convergência (absoluta) e a expressão do cálculo da soma pelo facto da razão da série geométrica ser $\frac{3}{4} \in]-1,1[$.
Quanto à terceira série vamos, em primeiro lugar, estudar a convergência da série dos módulos:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

Como se trata de uma série de termos positivos e $\frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}{\frac{1}{n}} \to 1 \in]0,+\infty[$, concluimos pelo critério de comparação que aquela tem a mesma natureza que a série $\sum \frac{1}{n}$, ou seja, é divergente. Logo, a série dada não é absolutamente convergente. Vejamos se é simplesmente convergente ou divergente. Trata-se de uma série alternada que podemos escrever na forma $\sum(-1)^n a_n$ com $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$. Como,

$$\text{(i) } a_n > 0 \qquad \text{(ii) } (a_n) \text{ é decrescente,} \qquad \text{(iii) } \lim a_n = 0\,,$$

concluimos, pelo critério de Leibnitz, que a série dada é convergente e, portanto, é simplesmente convergente.

b) Raio de convergência: sendo c_n o coeficiente da série de potências dada, isto é, $c_n = \frac{n}{3n+2}$,

$$R = \lim\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim\left|\frac{\frac{n}{3n+2}}{\frac{n+1}{3(n+1)+2}}\right| = \lim \frac{n}{n+1}\frac{3n+5}{3n+2} = 1\,.$$

Concluimos que, se $|x| < 1$, a série é absolutamente convergente e se $x < -1$ ou $x > 1$ a série é divergente. Se $x = 1$, a série reduz-se a $\sum \frac{n}{3n+2}$, cujo termo geral não é um infinitésimo. O mesmo sucede quando $x = -1$, em que a série se reduz a $\sum \frac{n(-1)^n}{3n+2}$. Logo, se $|x| = 1$ a série é divergente.

(1,5 val.) **6.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e φ o seu integral indefinido com ponto base $c \in \mathbb{R}$. Mostre que, dado um intervalo $I = [a,b]$ com $-\infty < a < b < +\infty$, existe uma constante $L(I) > 0$, tal que,

$$\forall_{x,y\in I} \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant L(I)|x-y|\,.$$

Seja, como é dito no enunciado, $\varphi(x) = \int_c^x f(t)\,dt$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Então, das propriedades elementares do integral e usando o Teorema da Média, em virtude da continuidade f, para cada $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \int_c^x f(t)\,dt - \int_c^y f(t)\,dt = \int_y^x f(t)\,dt = f(q)(x-y),$$

onde q é um certo valor compreendido entre x e y. Se fixarmos o intervalo $I = [a,b]$, como f e, por conseguinte, $|f|$, são contínuas, pelo Teorema de Weierstrass sabemos que $|f|$ é majorada em I e, portanto existe $L(I) > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant L(I)$, para todo $x \in I$. Logo, se $x, y \in I$, então $q \in I$ e, portanto

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| = |f(q)||x-y| \leqslant L(I)|x-y|\,.$$