2.º TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - Versão A
LEAN, MEMat, MEQ

1.º Sem. 2016/17 9/1/2017 Duração: 1h30m

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

(3,5 val.) **1.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a)}\ \frac{1}{x(1+(\ln x)^2)}\,, \qquad \text{b)}\ \frac{1+e^x}{2\sqrt{x+e^x}}\,, \qquad \text{c)}\ \frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,.$$

(3,5 val.) **2.** Calcule os integrais

$$\text{a)}\ \int_0^{1/2} \frac{1}{(1-t)^2(1+t)}\,\mathrm{d}t\,, \qquad \text{b)}\ \int_0^{\pi/6} \frac{1}{(1-\operatorname{sen} x)\cos x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Sugestão: relacione b) com a) usando a substituição de variável $t = \operatorname{sen} x$ (ainda que não resolva a)).

(2,5 val.) **3.** Determine a área do conjunto de pares ordenados (x, y) que satisfazem simultaneamente,

$$x \geqslant 0\,, \qquad y \leqslant 2x\,, \qquad y \leqslant 2x^2\,, \qquad y \geqslant x^2 - 3\,.$$

(4,0 val.) **4.** Seja $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função positiva e de classe C^1. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x) = (x^2+1)\int_0^{x^2} \frac{h(t)}{t+1}\,\mathrm{d}t\,.$$

a) Calcule as funções f' e f'' explicitando os seus domínios.

b) Mostre que f tem extremo em 0 e classifique-o.

c) Se os conjuntos imagem $h([-1,1])$ e $h'([-1,1])$ estão contidos em $[-1,1]$, mostre que, se $|x| \leqslant 1$, então,

$$|f(x)| \leqslant 6x^2.$$

Sugestão: estude o resto de Lagrange da fórmula de Taylor de primeira ordem em 0.

(5,0 val.) **5.** a) Classifique cada uma das séries seguintes em absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente. Calcule a soma de uma delas:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{3^n (n!)^2}\,, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{2^{2n+1}}\,, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

b) Determine os valores de x para os quais a seguinte série de potências é absolutamente convergente, simplesmente convergente e divergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n x^n}{3n+2}\,.$$

(1,5 val.) **6.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e φ o seu integral indefinido com ponto base $c \in \mathbb{R}$. Mostre que, dado um intervalo $I = [a, b]$ com $-\infty < a < b < +\infty$, existe uma constante $L(I) > 0$, tal que,

$$\forall_{x,y \in I} \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant L(I)|x - y|\,.$$