Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

2.º TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - Versão A

MEBiol, MEAmbi

1.º Sem. 2015/16 4/1/2016 Duração: 1h30m

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

(3,0 val.) **1.** Calcule os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(1+\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\right)^x$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\operatorname{sen}(t^2)\,dt}{\int_0^x t(e^{t^4}-1)dt}$

a) Trata-se de uma indeterminação do tipo $1^{+\infty}$, a qual convertemos numa indeterminação do tipo $0\times(+\infty)$ e usamos a regra de Cauchy para levantar esta última:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln\left(1+\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\right)}$$

Observando que esta última indeterminação se pode converter numa tipo $\frac{\infty}{\infty}$,

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}},$$

e que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\ln\left(1+\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(1+\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\right)}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\left(1+\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\right)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-0}\,(1+0)}=1\,,$$

concluimos, que podemos usar a regra de Cauchy para concluir que

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\operatorname{arcsen}\frac{1}{x}\right)=1$$

e, portanto, o limite pedido existe e tem o valor $e^1=e$.

b) Trata-se de uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Usando o Teorema Fundamental do Cálculo e o Teorema da Derivação da Função Composta:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^{x^2}\operatorname{sen}(t^2)\,dt\right)'}{\left(\int_0^x t(e^{t^4}-1)dt\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x^4)(x^2)'}{x(e^{x^4}-1)}=2\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x^4)}{e^{x^4}-1}=2.1=2\,.$$

Concluimos, pela regra de Cauchy, que o limite pedido existe e é igual a 2.

(4,5 val.) **2.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $\displaystyle\frac{2e^{2x}}{e^{4x}+1}$ b) $\displaystyle\frac{\sqrt{\ln x}}{x}$ c) $x^2\operatorname{arctg}(x^3)$

a) $\mathrm{P}\dfrac{2e^{2x}}{e^{4x}+1} = \operatorname{arctg}(e^{2x})\,.$

b) $\mathrm{P}\dfrac{\sqrt{\ln x}}{x} = \dfrac{2}{3}(\ln x)^{3/2}$

c) Primitivando por partes:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(x^2\operatorname{arctg}(x^3)\right) &= \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}(x^3) - \mathrm{P}\left(\frac{x^3}{3}\cdot\frac{3x^2}{1+x^6}\right)\\ &= \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}(x^3) - \mathrm{P}\frac{x^5}{1+x^6} = \frac{x^3}{3}\operatorname{arctg}(x^3) - \frac{1}{6}\ln(1+x^6)\,.\end{aligned}$$

(3,0 val.) **3.** a) Calcule o integral

$$\int_1^e \frac{3+t+3t^2}{(1+t^2)t}\mathrm{d}t\,.$$

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{3+t+3t^2}{(1+t^2)t}\mathrm{d}t &= \int_1^e \frac{3(1+t^2)+t}{(1+t^2)t}\mathrm{d}t = \int_1^e \left(\frac{3}{t}+\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t =\\ &= \left[3\ln|t| + \operatorname{arctg} t\right]_{t=1}^{t=e} = 3 + \operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}\,.\end{aligned}$$

b) Determine a área da região plana

$$D = \left\{(x,y) : 2 \leqslant x \leqslant 1+e^2 \ \wedge\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{3x+\sqrt{x-1}}{2x(x-1)}\right\}$$

(Sugestão: Pode-lhe ser útil usar a alínea a).)

Calculemos o integral que dá a área de D, usando a substituição de variável $t = \sqrt{x-1}$. Dado que $x = 1+t^2$ e que, portanto, $\frac{dx}{dt} = 2t$, obtemos

$$\int_2^{1+e^2} \frac{3x+\sqrt{x-1}}{2x(x-1)}\,\mathrm{d}x = \int_1^e \frac{3(1+t^2)+t}{2(1+t^2)t^2}\cdot\frac{dx}{dt}\mathrm{d}t = \int_1^e \frac{3+t+3t^2}{(1+t^2)t}\mathrm{d}t\,,$$

que é o integral calculado em a). Logo, a área de D é $3+\operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}$.

(2,5 val.) **4.** Seja $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função positiva e diferenciável. Seja $\phi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função definida por:

$$\phi(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

a) Justifique que ϕ é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e calcule ϕ' e ϕ''.

Como f é contínua em $\mathbb{R}$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, o integral indefinido $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ define uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ com derivada

$$F'(x) = f(x)\,.$$

A função ϕ é a composta das funções diferenciáveis F e seno sendo, portanto, diferenciável com derivada

$$\phi'(x) = \frac{d}{dx}F(\operatorname{sen} x) = F'(\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x)' = f(\operatorname{sen} x)\cos x\,.$$

Como ϕ' é o produto da função cosseno com a composta de f com a função seno, todas funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$, concluimos que ϕ' é diferenciável em $\mathbb{R}$, ou seja ϕ é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$, com segunda derivada

$$\begin{aligned}\phi''(x) &= \frac{d}{dx}(f(\operatorname{sen} x)\cos x) = \frac{d}{dx}f(\operatorname{sen} x)\cos x + f(\operatorname{sen} x)(\cos x)' \\ &= f'(\operatorname{sen} x)\cos^2 x - f(\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x\,.\end{aligned}$$

b) Determine e classifique os extremos de ϕ.

Calculemos, em primeiro lugar, os pontos de estacionaridade de ϕ:

$$\phi'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(\operatorname{sen} x)\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\,,$$

onde usámos a hipótese de f ser positiva e, portanto, não se anular em nenhum ponto. Calculemos as concavidades do gráfico de ϕ nestes pontos. De acordo com a),

$$\phi''(\frac{\pi}{2} + k\pi) = -f(\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + k\pi))\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} + k\pi)\,.$$

Logo, para k par, $\phi''(\frac{\pi}{2} + k\pi) = -f(1) < 0$ enquanto que, para k ímpar, $\phi''(\frac{\pi}{2} + k\pi) = f(-1) > 0$. Conclusão: ϕ tem mínimos relativos nos pontos $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com k ímpar e máximos relativos nos pontos $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com k par. Como ϕ é periódica de período 2π, concluimos que esses mínimos e máximos relativos são na realidade absolutos.

(4,5 val.) **5.** Classifique cada uma das séries seguintes em absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente:

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^2-1}}{\ln n + n^2} \qquad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)3^n}{(n^2+3)2^n} \qquad \text{c)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(2+5n)}.$$

a) Trata-se de uma série de termos positivos. Apliquemos o critério de comparação usando a série $\sum \frac{\sqrt{n^2}}{n^2} = \sum \frac{1}{n}$. Esta é a série harmónica a qual sabemos ser divergente.

$$\lim \frac{\frac{\sqrt{n^2-1}}{\ln n+n^2}}{\frac{\sqrt{n^2}}{n^2}} = \lim \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}} \cdot \frac{n^2}{\ln n + n^2} = 1 \neq 0, \infty\,.$$

Logo a série dada tem a mesma natureza que a série harmónica, ou seja, é divergente.

b) Trata-se de uma série de termos positivos. Apliquemos o critério de d'Alembert:

$$\lim \frac{\frac{(n+3)3^{n+1}}{((n+1)^2+3)2^{n+1}}}{\frac{(n+2)3^n}{(n^2+3)2^n}} = \frac{3}{2} \lim \frac{n+3}{n+2} \frac{n^2+3}{(n+1)^2+3} = \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{2} > 1\,.$$

Logo a série é divergente.

c) Trata-se de uma série alternada, portanto de termos sem sinal fixo. Vejamos, em primeiro lugar se é absolutamente convergente, ou seja, se é convergente a série dos módulos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\ln(2+5n)} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln(2+5n)}\,.$$

A esta série de termos positivos aplicamos um dos critérios de comparação. Para n suficientemente grande, $\ln(2+5n) < n$ (dado que $\frac{\ln(2+5n)}{n} \to 0$), e portanto, $\frac{1}{\ln(2+5n)} > \frac{1}{n}$. Como a série $\sum \frac{1}{n}$ é divergente concluimos então que a série $\sum \frac{1}{\ln(2+5n)}$ é divergente. Logo a série dada não é absolutamente convergente.

Para concluirmos sobre a convergência da série dada apliquemos o critério de Leibnitz para séries alternadas. A série é da forma $\sum (-1)^n a_n$ com $a_n = \frac{1}{\ln(2+5n)}$. Uma vez que $a_n > 0$, para todo n, que a_n é decrescente e que $a_n \to 0$, concluimos que a série é convergente e, portanto, simplesmente convergente.

(2,5 val.) **6.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, duas vezes diferenciável, tal que $f(0) = f'(0) = 0$ e $f''(x) \geqslant 0$ para todo $x > 0$.

a) Use o Teorema de Lagrange para mostrar que

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x} \operatorname{arctg} f(x) \leqslant f'(x)\,.$$

Por hipótese, f é diferenciável em $\mathbb{R}$, tal como a função arctg e, portanto, a função composta $h(x) = \operatorname{arctg} f(x)$ é diferenciável em $\mathbb{R}$. Nesse caso, dado $x > 0$, podemos aplicar o Teorema de Lagrange a esta função no intervalo $[0, x]$, para concluirmos que existe $c \in\,]0, x[$ tal que

$$\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = h'(c) = \frac{f'(c)}{1 + (f(c))^2} \leqslant f'(c) \leqslant f'(x)\,.$$

Na primeira desigualdade, usámos as hipóteses $f'(0) = 0$ e $f''(x) \geqslant 0$, para $x \geqslant 0$, que por sua vez implicam que $f'(x) \geqslant 0$, para $x \geqslant 0$. Na segunda, usámos o facto da hipótese sobre f'' implicar que f' é crescente em $\mathbb{R}^+$. Dada a hipótese $f(0) = 0$ e, portanto $h(0) = 0$, e usando a transitividade da relação de ordem, concluimos imediatamente a desigualdade a provar.

b) Seja g a função contínua em $\mathbb{R}$ tal que, para $x \neq 0$, $g(x) = \frac{1}{x} \operatorname{arctg} f(x)$. Mostre que

$$\forall x > 0, \quad \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(x)\,.$$

Para $x > 0$, em virtude de a), $g(x) \leqslant f'(x)$. Logo, e como, de acordo com as propriedades elementares do integral este preserva a relação de ordem, usando a regra de Barrow:

$$\forall x > 0 \quad \int_0^x g(t)\,dt \leqslant \int_0^x f'(t)\,dt = f(x) - f(0) = f(x)\,.$$