

2.º TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - Versão A
MEBiol, MEAmbi

1.º Sem. 2015/16 4/1/2016 Duração: 1h30m

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

(3,0 val.) **1.** Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \arcsen \frac{1}{x}\right)^x$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sen(t^2) dt}{\int_0^x t(e^{t^4} - 1) dt}$

(4,5 val.) **2.** Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $\frac{2e^{2x}}{e^{4x} + 1}$ b) $\frac{\sqrt{\ln x}}{x}$ c) $x^2 \operatorname{arctg}(x^3)$

(3,0 val.) **3.** a) Calcule o integral

$$\int_1^e \frac{3 + t + 3t^2}{(1 + t^2)t} dt.$$

b) Determine a área da região plana

$$D = \left\{ (x, y) : 2 \leq x \leq 1 + e^2 \wedge 0 \leq y \leq \frac{3x + \sqrt{x-1}}{2x(x-1)} \right\}$$

(Sugestão: Pode-lhe ser útil usar a alínea a).)

(2,5 val.) **4.** Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função positiva e diferenciável. Seja $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por:

$$\phi(x) = \int_0^{\sen x} f(t) dt.$$

a) Justifique que ϕ é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e calcule ϕ' e ϕ'' .

b) Determine e classifique os extremos de ϕ .

(4,5 val.) **5.** Classifique cada uma das séries seguintes em absolutamente convergente, simplesmente convergente ou divergente:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{\ln n + n^2}$ b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+2)3^n}{(n^2+3)2^n}$ c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(2+5n)}.$

(2,5 val.) **6.** Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, duas vezes diferenciável, tal que $f(0) = f'(0) = 0$ e $f''(x) \geq 0$ para todo $x > 0$.

a) Use o Teorema de Lagrange para mostrar que

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x} \operatorname{arctg} f(x) \leq f'(x).$$

b) Seja g a função contínua em $\mathbb{R}$ tal que, para $x \neq 0$, $g(x) = \frac{1}{x} \operatorname{arctg} f(x)$. Mostre que

$$\forall x > 0, \quad \int_0^x g(t) dt \leq f(x).$$