TÉCNICO LISBOA

1.º TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - Versão B
LEGM, MEC

1.º Sem. 2017/18 11/11/2017, 9h Duração: 1h30m

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

(2,5 val.) **1.** Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} : |2 - x^2| \leq 3\}$, D o domínio da função dada por $h(x) = \operatorname{arcsen}(x-3)$ e $B = A \cap D$.

a) Escreva A e D como um intervalo ou uma união de intervalos e mostre que $B = [2, \sqrt{5}]$.

b) Determine, caso exista em $\mathbb{R}$, $\min(B \cap \mathbb{Q})$, $\max(B \cap \mathbb{Q})$, $\inf(B \setminus \mathbb{Q})$, $\sup(B \setminus \mathbb{Q})$.

(3,0 val.) **2.** Considere a sucessão *decrescente* definida por recorrência por

$$u_1 = 2\,, \qquad u_{n+1} = \sqrt{\frac{2 + u_n^2}{3}}.$$

a) Mostre por indução matemática que $u_n > 1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

b) Pode concluir que u_n é convergente em $\mathbb{R}$? Justifique e, em caso afirmativo, determine $\lim u_n$.

(3,0 val.) **3.** Calcule, ou justifique que não existe em $\overline{\mathbb{R}}$, o limite de cada uma das seguintes sucessões:

$$\cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+3}}{1+\sqrt{3n}}\,, \qquad \frac{n^2 \cdot n! + n^{10}}{(n+1)! + 4^n(n+1)}.$$

(2,5 val.) **4.** Calcule cada um dos seguintes limites, caso exista em $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\left[1 - \operatorname{sen}(x^4 + \sqrt{1-x})\right]^2}{x+1}, \qquad \lim_{x\to0^+} \Big[\ln\big(e + \operatorname{sen} x\big)\Big]^{\frac{1}{2x}}.$$

(6,0 val.) **5.** Considere $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2\, e^{\frac{1}{x+1}}\,, & \text{se } x < -1 \\ \arctan[(x+1)^2]\,, & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

a) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Mostre que f é prolongável por continuidade ao ponto $x = -1$.

c) Designando por F esse prolongamento, estude F quanto à diferenciabilidade em $x = -1$ e determine a função F'.

d) Estude F quanto à monotonia e existência de extremos locais e absolutos. Indique, justificando, o contradomínio de F.

(1,5 val.) **6.** Prove que a equação $e^{-x} = 9 - x^2$ tem exactamente duas soluções em $\mathbb{R}$.

(1,5 val.) **7.** Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e (a_n) uma sucessão real tal que $a_n \to +\infty$. Mostre que se $g\left(\frac{1}{a_n}\right) = g(a_n)$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = b \in \mathbb{R}$, então g tem um mínimo $g(c)$ em $[0, +\infty[$ e $g(c) \leq b$.