Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1.º TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - Versão B

LEAN, LEMat, MEQ

1.º Sem. 2016/17 12/11/2016 Duração: 1h30m

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

(2,5 val.) **1.** Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : ||x| - 4| \leq 2\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) \leq 1\}, \quad C = A \cap B.$$

a) Escreva A e B como intervalos ou união de intervalos e mostre que $C = [-6, -2] \cup \{2\}$.

b) Determine, ou justifique que não existe em $\mathbb{R}$, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo de C e de $C \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

(3,5 val.) **2.** Dado $a \in \,]0, 4[$, seja (u_n) a sucessão definida por recorrência por $u_1 = a$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{8} + 2$, para $n \in \mathbb{N}$.

a) Mostre, usando o método de indução matemática, que $u_n \in \,]0, 4[$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Mostre que (u_n) é uma sucessão monótona.

c) Justifique que a sucessão é convergente e calcule o seu limite.

(3,0 val.) **3.** Calcule, ou justifique que não existe em $\overline{\mathbb{R}}$, o limite de cada uma das seguintes sucessões:

$$\text{a)} \quad \frac{5^n + n^2}{4^n + (\operatorname{sen} n!)^5}\,, \qquad \text{b)} \quad 2^n - n!(-1)^n\,.$$

(3,0 val.) **4.** Calcule cada um dos seguintes limites, caso exista em $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\text{a)} \quad \lim_{x \to -2} \frac{1}{x+2} \operatorname{sen} \frac{x+2}{x-1}\,, \qquad \text{b)} \quad \lim_{x \to 0^+} \left(x^2 + 1\right)^{\frac{2}{\operatorname{sen} x}}\,.$$

(6,0 val.) **5.** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg}(5 \ln x), & \text{se } x > 0, \\ e^{(x^4)} - 1, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}.$$

a) Mostre que f é contínua em $x = 0$.

b) Calcule, se existirem, as derivadas laterais de f na origem. Que conclui sobre a diferenciabilidade de f na origem? Escreva a função f'.

c) Mostre que $[0, +\infty[\, \subset f(\mathbb{R}^+)$.

d) Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^-$ uma função diferenciável e injectiva, tal que $h(5) = -1$, $h'(5) = 3$, e $g = f \circ h$. Justifique que g é injectiva, g^{-1} é diferenciável em $g(5) = e - 1$ e calcule $(g^{-1})'(e-1)$.

(2,0 val.) **6.** Seja f uma função contínua e majorada em $I = [0, +\infty[$. Justifique que a função G dada por

$$G(x) = \sup f\left([x, +\infty[\right)\,,$$

está bem definida para cada $x \in I$. Mostre que se G não é uma função constante, então f tem máximo absoluto em I.

(Sugestão: começe por mostrar que existe $a > 0$ tal que $G(a) < G(0)$)