TÉCNICO LISBOA

1.º TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - Versão A

LEGM, MEC

1.º Sem. 2017/18 11/11/2017, 9h Duração: 1h30m

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

(2,5 val.) **1.** Considere os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| \leq 2\}$, D o domínio da função dada por $h(x) = \arccos(2 - x)$ e $B = A \cap D$.

a) Escreva A e D como um intervalo ou uma união de intervalos e mostre que $B = [1, \sqrt{3}]$.

Temos $|x^2 - 1| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x^2 - 1 \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq x^2 \leq 3$. Como $x^2 \geq -1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, e $x^2 < 3 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$, logo $A = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.
Quanto a D temos $D_{\text{arccos}} = [-1, 1]$, e $-1 \leq 2 - x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3$, logo $D = [1, 3]$.
Temos então $B = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \cap [1, 3] = [1, \sqrt{3}]$.

b) Determine, caso exista em $\mathbb{R}$, $\inf(B \cap \mathbb{Q})$, $\max(B \cap \mathbb{Q})$, $\min(B \setminus \mathbb{Q})$, $\sup(B \setminus \mathbb{Q})$.

Como B é um intervalo, temos $\text{Minorantes}(B \cap \mathbb{Q}) = \text{Minorantes}(B \setminus \mathbb{Q}) = \text{Minorantes}(B) =]-\infty, 1]$, e $\text{Majorantes}(B \cap \mathbb{Q}) = \text{Majorantes}(B \setminus \mathbb{Q}) = \text{Majorantes}(B) = [\sqrt{3}, +\infty[$. Logo:

$\inf(B \cap \mathbb{Q}) = \inf\left([1, \sqrt{3}] \cap \mathbb{Q}\right) = 1$,
$\max(B \cap \mathbb{Q})$ não existe, já que $\sup\left([1, \sqrt{3}] \cap \mathbb{Q}\right) = \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.
$\min(B \setminus \mathbb{Q})$ não existe já que $\inf\left((1, \sqrt{3}] \setminus \mathbb{Q}\right) = 1 \in \mathbb{Q}$,
$\sup(B \setminus \mathbb{Q}) = \sup\left([1, \sqrt{3}] \setminus \mathbb{Q}\right) = \sqrt{3}$.

(3,0 val.) **2.** Considere a sucessão *crescente* definida por recorrência por

$$u_1 = 0\,, \qquad u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + 1}{2}}.$$

a) Mostre por indução matemática que $u_n < 1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

- Para $n = 1$: $u_1 = 0$ logo $u_1 < 1$.
- Hipótese de indução: $u_n < 1$, para dado $n \in \mathbb{N}$.

  A provar: $u_{n+1} < 1$.

  Como $u_n \geq 0$, já que é crescente e $u_1 = 0$, temos $0 \leq u_n < 1 \Rightarrow u_n^2 < 1$. Logo, $0 < \dfrac{u_n^2 + 1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$, e assim $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{u_n^2 + 1}{2}} < 1$.

Por indução matemática, conclui-se que $u_n < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Pode concluir que u_n é convergente em $\mathbb{R}$? Justifique e, em caso afirmativo, determine $\lim u_n$.

Sim, uma vez que u_n será crescente e majorada por 1, logo monótona e limitada e assim convergente em $\mathbb{R}$.

Sendo $L = \lim u_n$, temos $\lim u_{n+1} = \lim u_n$, já que u_{n+1} é subsucessão de u_n (ou pela definição de limite). Tomando o limite em ambos os lados da expressão por recorrência,

$$u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + 1}{2}} \Rightarrow L = \sqrt{\frac{L^2 + 1}{2}} \Rightarrow 2L^2 = L^2 + 1 \Leftrightarrow L = \pm 1.$$

Como u_n é positiva, $L = 1$.

(3,0 val.) **3.** Calcule, ou justifique que não existe em $\overline{\mathbb{R}}$, o limite de cada uma das seguintes sucessões:

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2n+1}}{2+\sqrt{n}}\,, \qquad \frac{(n+1)! + (n+1)2^n}{2n \cdot n! + n^8}.$$

Temos

$$\lim \frac{\sqrt{2n+1}}{2+\sqrt{n}} = \lim \frac{\sqrt{\dfrac{2n+1}{n}}}{\dfrac{2}{\sqrt{n}} + 1} = \lim \frac{\sqrt{2 + \dfrac{1}{n}}}{\dfrac{2}{\sqrt{n}} + 1} = \sqrt{2}.$$

Por outro lado $\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 1$, se n é ímpar e $\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$, se n é par. Logo a sucessão $\operatorname{sen}^2\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2n+1}}{2+\sqrt{n}}$ tem 2 sublimites diferentes 0 e $\sqrt{2}$, logo não é convergente em $\overline{\mathbb{R}}$.

$$\lim \frac{(n+1)! + (n+1)2^n}{2n \cdot n! + n^8} = \lim \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n! + 2^n}{2n! + n^7} = \lim \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1 + \dfrac{2^n}{n!}}{2 + \dfrac{n^7}{n!}} = \frac{1}{2},$$

já que pela escala de sucessões, $a^n << n!$, $a > 1$, e $n^p << n!$, $p \in \mathbb{N}$.

(2,5 val.) **4.** Calcule cada um dos seguintes limites, caso exista em $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left[1 + \cos(x^2 + \sqrt{x})\right]^2}{x-1}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \left[\ln\left(e + 2x\right)\right]^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}.$$

Temos $0 \leq 1 + \cos(x^2 + \sqrt{x}) \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \left[1 + \cos(x^2 + \sqrt{x})\right]^2 \leq 4$, para qualquer $x \geq 0$, logo, para $x > 1$,

$$0 \leq \frac{\left[1 + \cos(x^2 + \sqrt{x})\right]^2}{x-1} \leq \frac{4}{x-1}, \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x-1} = 0.$$

Por enquadramento, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\left[1+\cos(x^2+\sqrt{x})\right]^2}{x-1} = 0$.

O limite dado resulta numa indeterminação 1^∞. Temos

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\ln\left(e+2x\right)\right]^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln\left(\ln\left(e+2x\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}\right)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln\left(\ln\left(e+2x\right)\right)}{\operatorname{sen} x}}$$

No expoente, temos uma indeterminação $\frac{0}{0}$, aplicando a Regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(\ln\left(e+2x\right)\right)}{\operatorname{sen} x} \overset{RC}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\ln\left(\ln(e+2x)\right)\right)'}{(\operatorname{sen} x)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2}{\ln(e+2x)\,(e+2x)}}{\cos x} = \frac{2}{e}.$$

Logo, $\lim_{x\to 0^+}\left[\ln\left(e+2x\right)\right]^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = e^{2/e}$.

(NOTA: Como é usual, o símbolo $\overset{RC}{=}$ designa igualdade condicionada à existência em $\overline{\mathbb{R}}$ do limite à direita, caso em que a Regra de Cauchy será aplicável.)

(6,0 val.) **5.** Considere $f : \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2\, e^{-\frac{1}{x-1}}\,, & \text{se } x > 1 \\ \arctan[(x-1)^2]\,, & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

a) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \arctan[(x-1)^2] = \lim_{y\to+\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x-1)^2\, e^{-\frac{1}{x-1}} = +\infty\cdot e^0 = +\infty.$$

b) Mostre que f é prolongável por continuidade ao ponto $x = 1$.

f é prolongável por continuidade ao ponto $x = 1$ se existir em $\mathbb{R}$, $\lim_{x\to 1} f(x)$. Temos

$$f(1^+) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x-1)^2\, e^{-\frac{1}{x-1}} = 0\cdot e^{-\infty} = 0,$$

$$f(1^-) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \arctan[(x-1)^2] = \arctan(0) = 0.$$

Logo, $f(1^+) = f(1^-) = 0$ e assim existe $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$.

c) Designando por F esse prolongamento, estude F quanto à diferenciabilidade em $x = 1$ e determine a função F'.

De b), temos $F(1) = 0$.

$$F'_d(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)^2\, e^{-\frac{1}{x-1}}}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} (x-1)\, e^{-\frac{1}{x-1}} = 0$$

$$F'_e(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\arctan[(x-1)^2]}{x - 1}$$

É indeterminação $\frac{0}{0}$, vamos usar a Regra de Cauchy:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{\left(\arctan[(x-1)^2]\right)'}{(x-1)'} = \lim_{x \to 1^-} \frac{2(x-1)}{1 + (x-1)^4} = 0$$

logo $F'_e(1) = 0$. Como $F'_e(1) = F'_d(1) = 0$, conclui-se que F é diferenciável em 1 com $F'(1) = 0$.

F é diferenciável para $x \neq 1$, já que é dada numa vizinhança de qualquer desses pontos pela composição e produto de funções diferenciáveis: exponencial, arcotangente e funções racionais. Para $x < 1$:

$$F'(x) = f'(x) = \left(\arctan[(x-1)^2]\right)' = \frac{2(x-1)}{1 + (x-1)^4}.$$

Para $x > 1$:

$$F'(x) = f'(x) = \left((x-1)^2\, e^{-\frac{1}{x-1}}\right)' = 2(x-1)e^{-\frac{1}{x-1}} + (x-1)^2 \cdot \frac{1}{(x-1)^2}\, e^{-\frac{1}{x-1}}$$
$$= e^{-\frac{1}{x-1}}(2(x-1) + 1) = e^{-\frac{1}{x-1}}(2x - 1).$$

d) Estude F quanto à monotonia e existência de extremos locais e absolutos. Indique, justificando, o contradomínio de F.

Para $x < 1$:

$$\frac{2(x-1)}{1 + (x-1)^4} < 0 \;\Rightarrow\; F'(x) \;< 0 \quad \Rightarrow F \text{ é decrescente em }]-\infty, 1[$$

e não existem extremos locais em $]-\infty, 1[$.
Para $x > 1$: como $2x - 1 > 0$ para $x > 1/2$, temos

$$e^{-\frac{1}{x-1}}(2x - 1) > 0 \;\Rightarrow\; F'(x) \;> 0 \quad \Rightarrow F \text{ é crescente em }]1, +\infty[$$

e não existem extremos locais em $]1, +\infty[$. Sendo F contínua em 1, $F(1)$ é ponto de mínimo de F, e é absoluto (já que F é decrescente em $]-\infty, 1]$ e crescente em $[1, +\infty[$ - ou vendo directamente que $F(x) > 0$, para $x \neq 1$).

		1	
$\frac{2(x-1)}{1+(x-1)^4}$			+
$e^{-\frac{1}{x-1}}(2x-1)$	-		
$F'(x)$	-	0	+
$F(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

Temos $F(x) \geq F(1) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Sendo F contínua e crescente em $[1, +\infty[$ e $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$, temos que $F([1, +\infty[) = [F(1), +\infty[= [0, +\infty[$. Logo $CD_F = [0, +\infty[$.

(1,5 val.) **6.** Prove que a equação $e^{2x} = 4 - x^2$ tem exactamente duas soluções em $\mathbb{R}$.

Seja $f(x) = e^{2x} - 4 + x^2$, então as soluções da equação acima correspondem aos zeros de f.

A função f é contínua em $\mathbb{R}$, e $f(0) = -3 < 0$, $f(2) = e^2 > 0$, $f(-2) = e^{-2} > 0$. Pelo teorema do Valor Intermédio, f tem um zero em $]-2, 0[$ e um zero em $]0, 2[$, já que muda de sinal nestes intervalos. Logo f tem pelo menos dois zeros

Por outro lado, f é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ com $f'(x) = 2e^{2x} + 2x$, $f''(x) = 4e^{2x} > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Conclui-se do teorema de Rolle, aplicado a f', que f' tem no máximo um zero. De novo pelo teorema de Rolle, agora aplicado a f, f tem no máximo 2 zeros.

(1,5 val.) **7.** Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e (a_n) uma sucessão real tal que $a_n \to +\infty$. Mostre que se $g\left(\frac{1}{a_n}\right) = g(a_n)$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = b \in \mathbb{R}$, então g tem um máximo $g(c)$ em $[0, +\infty[$ e $g(c) \geq b$.

Começamos por ver, usando a definição de limite e continuidade segundo Heine, que $\lim g(a_n) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = b$, uma vez que $a_n \to +\infty$, e $\lim g\left(\frac{1}{a_n}\right) = g(0)$, uma vez que g é contínua em 0 e $\frac{1}{a_n} \to 0$. Logo $g(0) = b$.

Se $g(x) \leq b$, para $x \in [0, +\infty[$ então $b = g(0)$ é máximo. Caso contrário, existe $a > 0$ tal que $g(a) > b$. Pela definição de limite em $+\infty$, existe $R > a$ tal que,

$$x > R \;\Rightarrow\; g(x) < g(a) = b + \varepsilon, \qquad \text{com } \varepsilon = g(a) - b > 0.$$

Em $[0, R]$, g tem máximo $g(c)$, pelo teorema de Weierstrass, uma vez que é contínua e $[0, R]$ é limitado e fechado. Como $0 < a < R$, temos $g(c) \geq g(a) > b$. Logo $g(x) < g(c)$, para $x > R$, e portanto $g(c)$ é máximo de g em $[0, +\infty[$ e $g(c) \geq b$.