Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1.º TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - Versão A

LEAN, LEMat, MEQ

1.º Sem. 2016/17 12/11/2016 Duração: 1h30m

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

(2,5 val.) **1.** Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : ||x| - 2| \leq 1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}(x+2) \geq 1\}, \quad C = A \cap B.$$

a) Escreva A e B como intervalos ou união de intervalos e mostre que $C = \{-1\} \cup [1,3]$.

Para A:

$$x \geq 0 \ \wedge \ ||x| - 2| \leq 1 \ \Leftrightarrow \ x \geq 0 \ \wedge \ |x-2| \leq 1 \ \Leftrightarrow \ x \geq 0 \ \wedge \ -1 \leq x - 2 \leq 1$$
$$\Leftrightarrow \ x \geq 0 \ \wedge \ 1 \leq x \leq 3 \ \Leftrightarrow \ x \in [1,3]\,.$$

$$x < 0 \ \wedge \ ||x| - 2| \leq 1 \ \Leftrightarrow \ x < 0 \ \wedge \ |-x-2| \leq 1 \ \Leftrightarrow \ x < 0 \ \wedge \ -1 \leq x + 2 \leq 1$$
$$\Leftrightarrow \ x < 0 \ \wedge \ -3 \leq x \leq -1 \ \Leftrightarrow \ x \in [-3,-1]\,.$$

Logo, $A = (x < 0 \ \wedge \ ||x| - 2| \leq 1) \vee (x \geq 0 \ \wedge \ ||x| - 2| \leq 1) = [-3,-1] \cup [1,3]$.
Para B:

$$\frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}(x+2) \geq 1 \ \Leftrightarrow \ \operatorname{arctg}(x+2) \geq \frac{\pi}{4} \ \Leftrightarrow \ x + 2 \geq \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 \ \Leftrightarrow \ x \geq -1\,.$$

Logo, $B = [-1, +\infty[$ e, por conseguinte,

$$C = A \cap B = ([-3,-1] \cup [1,3]) \cap [-1,+\infty[\, = \{-1\} \cup [1,3]\,.$$

b) Determine, ou justifique que não existe em $\mathbb{R}$, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo de C e de $C \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

$\sup C = \max C = 3, \quad \inf C = \min C = -1.$
$\inf C \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 1, \quad \sup C \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = 3.$
Não existe $\min C \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ nem $\max C \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, porque o ínfimo, 1, e o supremo, 3, são números racionais e, portanto, não pertencem a $C \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

(3,5 val.) **2.** Dado $a \in \,]0,2[$, seja (u_n) a sucessão definida por recorrência por $u_1 = a$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{4} + 1$, para $n \in \mathbb{N}$.

a) Mostre, usando o método de indução matemática, que $u_n \in \,]0,2[$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

A afirmação $P(n)$ que se pretende provar, para todo $n \in \mathbb{N}$, é '$u_n \in]0,2[$'.
Para $n = 1$: $u_1 = a \in]0,2[$, por hipótese, o que prova $P(1)$.
Provemos que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Partindo da hipótese de indução, $u_n \in]0,2[$:

$$0 < u_n < 2 \Rightarrow 0 < \frac{u_n^2}{4} < 1 \Rightarrow 1 < \frac{u_n^2}{4} + 1 < 2 \Rightarrow 0 < \frac{u_n^2}{4} + 1 < 2\,,$$

sendo a última desigualdade a tese de indução, $u_{n+1} \in]0,2[$.

b) Mostre que (u_n) é uma sucessão monótona.

Para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{4} + 1 - u_n = \frac{u_n^2 - 4u_n + 4}{4} = \frac{(u_n - 2)^2}{4} \geq 0,$$

o que prova que a sucessão é crescente.

c) Justifique que a sucessão é convergente e calcule o seu limite.

Pela alínea a), (u_n) é uma sucessão limitada. Pela alínea *b*), (u_n) é uma sucessão monótona. Então, o Teorema das sucessões limitadas e monótonas permite concluir que a sucessão (u_n) é convergente. Seja $L = \lim u_n$. Então,

$$\lim u_{n+1} = \lim\left(\frac{u_n^2}{4} + 1\right) \Leftrightarrow L = \frac{L^2}{4} + 1 \Leftrightarrow \frac{L^2 - 4L + 4}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{(L-2)^2}{4} = 0 \Leftrightarrow L = 2\,.$$

(3,0 val.) **3.** Calcule, ou justifique que não existe em $\overline{\mathbb{R}}$, o limite de cada uma das seguintes sucessões:

$$\text{a) } \frac{2^n + (\operatorname{sen} n!)^5}{3^n + n^2}\,, \qquad \text{b) } n!(-1)^n - n^5\,.$$

a) $$\frac{2^n + (\operatorname{sen} n!)^5}{3^n + n^2} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1 + \dfrac{(\operatorname{sen} n!)^5}{2^n}}{1 + \dfrac{n^2}{3^n}} \to 0.\tfrac{1+0}{1+0} = 0,$$

uma vez que, $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$ (c^n, com $|c| < 1$), $\dfrac{(\operatorname{sen} n!)^5}{2^n} \to 0$ (porque, $-1 \leq (\operatorname{sen} n!)^5 \leq 1$ e pelo Teorema das sucessões enquadradas), e, $\dfrac{n^2}{3^n} \to 0$ (escala de sucessões).

b) $n!(-1)^n - n^5 = n!\left((-1)^n - \dfrac{n^5}{n!}\right)$. Consideremos duas subsucessões:

$$\begin{aligned}
(u_n) \text{ com } n \text{ par} \ &: \quad u_n = n!\left(1 - \frac{n^5}{n!}\right) \to +\infty.(1-0) = +\infty\,, \\
(u_n) \text{ com } n \text{ ímpar} \ &: \quad u_n = n!\left(-1 - \frac{n^5}{n!}\right) \to +\infty.(-1-0) = -\infty\,.
\end{aligned}$$

Como a sucessão (u_n) tem dois sublimites diferentes em $\overline{\mathbb{R}}$, concluimos que (u_n) é divergente (não tem limite) em $\overline{\mathbb{R}}$.

(3,0 val.) **4.** Calcule cada um dos seguintes limites, caso exista em $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\text{a) } \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} \operatorname{sen}\left(\frac{x-1}{x+2}\right), \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0^+} \left(1-2x^2\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}.$$

a) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} \operatorname{sen}\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)}{\frac{x-1}{x+2}} \frac{1}{x+2} = 1.\frac{1}{3} = \frac{1}{3}\,.$

b) Trata-se de uma indeterminação do tipo 1^∞. Como,

$$\lim_{x\to 0^+} \left(1-2x^2\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-2x^2)}{\operatorname{sen} x}},$$

apliquemos a regra de Cauchy ao limite do expoente (indeterminação $\frac{0}{0}$):

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-2x^2)}{\operatorname{sen} x} \overset{\text{RC}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln(1-2x^2))'}{(\operatorname{sen} x)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-4x}{1-2x^2}}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0,$$

onde a existência do úlimo limte justifica a aplicação da referida regra. Concluindo:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(1-2x^2\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = e^0 = 1\,.$$

(6,0 val.) **5.** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg}(3\ln x), & \text{se } x > 0, \\ e^{(x^2)} - 1, & \text{se } x \le 0 \end{cases}.$$

a) Mostre que f é contínua em $x = 0$.

Numa vizinhança de cada $a \neq 0$, $f(x)$ coincide com uma função que pode ser obtida de funções polinomiais, exponencial, logaritmo e uma inversa trigonométrica, todas funções contínuas nos seus domínios, usando somas, produtos e função composta. Por isso, f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Falta mostrar que f é contínua em $a = 0$:

$$f(0) = f(0^-) = \lim_{x \to 0^-} (e^{(x^2)} - 1) = 1 - 1 = 0,$$
$$f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} x \operatorname{arctg}(3 \ln x) = 0.\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0\,.$$

Como $f(0) = f(0^-) = f(0^+)$ concluimos que f é contínua tamém em $a = 0$. Logo f é contínua em $\mathbb{R}$.

b) Calcule, se existirem, as derivadas laterais de f na origem. Que conclui sobre a diferenciabilidade de f na origem? Escreva a função f'.

$$f'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x \operatorname{arctg}(3 \ln x) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \operatorname{arctg}(3 \ln x) = -\frac{\pi}{2}\,,$$
$$f'_e(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{(e^{(x^2)} - 1) - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{(x^2)} - 1}{x^2} \cdot x = 1.0 = 0\,.$$

Como $f'_d(0) \neq f'_e(0)$ concluimos que não existe $f'(0)$ e, portanto, f não é diferenciável em 0.

$$f'(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(3 \ln x) + \frac{3}{1 + (3 \ln x)^2}, & \text{se } x > 0, \\ 2x e^{(x^2)}, & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

c) Mostre que $[0, +\infty[\subset f(\mathbb{R}^+)$

Como, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty) \cdot \frac{\pi}{2} = +\infty$, $f(1) = 0$ (logo, $0 \in f(\mathbb{R}^+)$), e como f é contínua em $\mathbb{R}^+$, pelo teorema de Bolzano (ou do valor intermédio), podemos concluir que $[0, +\infty[\subset f(\mathbb{R}^+)$.

d) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^-$ uma função diferenciável e injectiva, tal que $g(2) = -1$, $g'(2) = 4$, e $h = f \circ g$. Justifique que h é injectiva, h^{-1} é diferenciável em $h(2) = e - 1$ e calcule $(h^{-1})'(e - 1)$.

Em $\mathbb{R}^-$ a função f é estritamente crescente, logo a sua restrição a este conjunto é injectiva. Como g é injectiva e $g(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^-$, a função h é a composta de duas funções injectivas, logo, é injectiva e, portanto existe a função inversa h^{-1}. Como é a composta de duas funções diferenciáveis, h é diferenciável em $\mathbb{R}$ e, pelo Teorema da derivada da função inversa, h^{-1} é diferenciável no contradomínio de h e, em particular, em $e - 1 = h(2)$. Além disso, usando também as regras de derivação da função inversa e da função composta,

$$(h^{-1})'(1-e) = \frac{1}{h'(h^{-1}(1-e))} = \frac{1}{h'(2)} = \frac{1}{f'(g(2))g'(2)} = \frac{1}{4f'(-1)} = -\frac{1}{8e}.$$

(2,0 val.) **6.** Seja f uma função contínua e majorada em $I = [0, +\infty[$. Justifique que a função G dada por

$$G(x) = \sup f\left([x, +\infty[\right),$$

está bem definida para cada $x \in I$. Mostre que se G não é uma função constante, então f tem máximo absoluto em I.
(Sugestão: começe por mostrar que existe $a > 0$ tal que $G(a) < G(0)$)

Para cada $x \geq 0$, por definição de função majorada, o conjunto $f([x, +\infty[)$ é majorado e, em virtude do axioma do supremo, existe $\sup f([x, +\infty[)$, ou seja, $G(x)$ está bem definida.

Como, para cada $x > 0$, $[x, +\infty[\subset I$, e portanto, $f([x, +\infty[) \subset f(I)$, podemos deduzir que $\sup f([x, +\infty[) \leq \sup f(I)$, ou seja, $G(x) \leq G(0)$. Como, por hipótese, G não é constante, terá então que existir $a > 0$ tal que $G(a) < G(0)$.

Como f é contínua no intervalo limitado e fechado $[0, a]$, aplicando o teorema de Weierstrass neste intervalo, sabemos que existe $M = \max f([0, a])$. Mostremos que $G(a) < G(0)$ implica que, de facto, $M = \max f(I)$. Pela definição de $G(x)$, aquela desigualdade implica que, $\sup f([a, +\infty[) < \sup f(I)$ e, portanto, $\sup f(I) = \sup f([0, a]) = M$. Uma vez que $M \in f(I)$, concluimos que $M = \max f(I)$.