Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

1.º TESTE DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I - Versão A

LEAN, LEMat, MEQ

1.º Sem. 2016/17 12/11/2016 Duração: 1h30m

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

(2,5 val.) **1.** Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : ||x| - 2| \leq 1\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}(x+2) \geq 1\}, \quad C = A \cap B.$$

a) Escreva A e B como intervalos ou união de intervalos e mostre que $C = \{-1\} \cup [1, 3]$.

b) Determine, ou justifique que não existe em $\mathbb{R}$, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo de C e de $C \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

(3,5 val.) **2.** Dado $a \in]0, 2[$, seja (u_n) a sucessão definida por recorrência por $u_1 = a$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2}{4} + 1$, para $n \in \mathbb{N}$.

a) Mostre, usando o método de indução matemática, que $u_n \in]0, 2[$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Mostre que (u_n) é uma sucessão monótona.

c) Justifique que a sucessão é convergente e calcule o seu limite.

(3,0 val.) **3.** Calcule, ou justifique que não existe em $\overline{\mathbb{R}}$, o limite de cada uma das seguintes sucessões:

$$\text{a)} \quad \frac{2^n + (\operatorname{sen} n!)^5}{3^n + n^2}, \qquad \text{b)} \quad n!(-1)^n - n^5.$$

(3,0 val.) **4.** Calcule cada um dos seguintes limites, caso exista em $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\text{a)} \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} \operatorname{sen}\left(\frac{x-1}{x+2}\right), \qquad \text{b)} \lim_{x \to 0^+} \left(1 - 2x^2\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}.$$

(6,0 val.) **5.** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg}(3 \ln x), & \text{se } x > 0, \\ e^{(x^2)} - 1, & \text{se } x \leq 0 \end{cases}.$$

a) Mostre que f é contínua em $x = 0$.

b) Calcule, se existirem, as derivadas laterais de f na origem. Que conclui sobre a diferenciabilidade de f na origem? Escreva a função f'.

c) Mostre que $[0, +\infty[\subset f(\mathbb{R}^+)$

d) Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^-$ uma função diferenciável e injectiva, tal que $g(2) = -1$, $g'(2) = 4$, e $h = f \circ g$. Justifique que h é injectiva, h^{-1} é diferenciável em $h(2) = e - 1$ e calcule $(h^{-1})'(e-1)$.

(2,0 val.) **6.** Seja f uma função contínua e majorada em $I = [0, +\infty[$. Justifique que a função G dada por

$$G(x) = \sup f\left([x, +\infty[\right),$$

está bem definida para cada $x \in I$. Mostre que se G não é uma função constante, então f tem máximo absoluto em I.
(Sugestão: comece por mostrar que existe $a > 0$ tal que $G(a) < G(0)$)