1.3 Sucessões

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Considere as sucessões reais (u_n) e (v_n) definidas por recorrência por:

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n^2 + 1}, \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = 3, \\ v_{n+1} = \frac{3v_n}{(n+1)^2}. \end{cases}$$

Mostre, usando indução matemática, que para qualquer $n \in \mathbb{N}$,

(a) $u_n = \sqrt{2^n - 1}$, (b) $v_n = \dfrac{3^n}{(n!)^2}$.

RESOLUÇÃO

(a) Para $n = 1$, temos $u_1 = \sqrt{2^1 - 1} = 1$.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{2^n - 1}$.
Tese: $u_{n+1} = \sqrt{2^{n+1} - 1}$.
Temos por hipótese, $u_n^2 = 2^n - 1$. Assim, usando a fórmula de recorrência,

$$u_{n+1} = \sqrt{2u_n^2 + 1} = \sqrt{2(2^n - 1) + 1} = \sqrt{2^{n+1} - 2 + 1} = \sqrt{2^{n+1} - 1},$$

como queríamos mostrar.

(b) Para $n = 1$, temos $v_1 = \dfrac{3^1}{(1!)^2} = 3$.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{3^n}{(n!)^2}$ (i.e $P(n)$ é verdadeira) e queremos provar:
Tese: $v_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{((n+1)!)^2}$.
Temos por hipótese, $v_n = \dfrac{3^n}{(n!)^2}$. Usando a fórmula de recorrência,

$$v_{n+1} = \frac{3v_n}{(n+1)^2} = \frac{3\frac{3^n}{(n!)^2}}{(n+1)^2} = \frac{3^{n+1}}{(n!)^2(n+1)^2} = \frac{3^{n+1}}{((n+1)!)^2}$$

como queríamos mostrar.

2. Considere as sucessões definidas da seguinte forma, com $a, r \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} u_1 = a, \\ u_{n+1} = r + u_n, \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 = a, \\ v_{n+1} = rv_n. \end{cases}$$

(A sucessão (u_n) é uma *progressão aritmética* de primeiro termo a e razão r e a sucessão (v_n) é uma *progressão geométrica* de primeiro termo a e razão r.)

Responsável:
jpinto@math.tecnico.ulisboa.pt

a) Mostre por indução matemática que $u_n = a + (n-1)r$ e $v_n = ar^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

b) Dê exemplos de valores de r e de a tais que (i) (u_n) seja monótona crescente; (ii) (u_n) seja monótona decrescente; (iii) (v_n) seja monótona crescente; (iv) (v_n) não seja monótona.

c) Mostre que (u_n) não é limitada, para quaisquer $a \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$. Para que valores de r e a será (v_n) limitada? E convergente?

RESOLUÇÃO

Sejam $a, r \in \mathbb{R}$, e (u_n), (v_n) sucessões tais que $u_1 = a$, $u_{n+1} = r + u_n$ e $v_1 = a$, $v_{n+1} = rv_n$.

a) Mostrar que $u_n = a + (n-1)r$ e $v_n = ar^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$:
Vamos considerar só a progressão aritmética (u_n):
- $n = 1$: $u_1 = a = a + (1-1)r$.
- Hipótese de indução: $u_n = a + (n-1)r$, para certo $n \in \mathbb{N}$. Queremos ver que $u_{n+1} = a + nr$. Então, por hipótese,

$$u_{n+1} = r + u_n = r + a + (n-1)r = a + nr.$$

b) (i) (u_n) monótona crescente: em geral, $u_{n+1} - u_n = r$, logo (u_n) será monótona crescente sse $r \geq 0$, com a qualquer (se $r = 0$, (u_n) é a sucessão constante igual a a). Por exemplo, $u_1 = 1$, $u_{n+1} = 3 + u_n$.

(ii) (u_n) monótona decrescente: $r \leq 0$, a qualquer. Por exemplo, $u_1 = 1$, $u_{n+1} = -3 + u_n$.

(iii) (v_n) monótona crescente: em geral, $v_{n+1} - v_n = ar^n - ar^{n-1} = ar^{n-1}(r-1)$. Logo, (v_n) será monótona crescente sse $a \geq 0 \wedge r \geq 1$ ou $a \leq 0 \wedge 0 \leq r \leq 1$ (se $r < 0$, r^{n-1} muda de sinal, e (v_n) não é monótona). Por exemplo, $v_1 = 2$, $v_{n+1} = 3v_n$, $v_1 = -2$, $v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$,

(iv) (v_n) não seja monótona: de (iii), (v_n) não é monótona sse $r < 0$ (a qualquer). Por exemplo, $v_1 = 2$, $v_{n+1} = -3v_n$.

c) (u_n) não é limitada: temos, por a), $u_n = a + (n-1)r$, logo dado $b \in \mathbb{R}$ qualquer, para $r > 0$,

$$u_n > b \Leftrightarrow n > \frac{b-a}{r} + 1$$

e portanto (u_n) não é majorada. Se $r < 0$, (u_n) não será minorada.
Quanto a (v_n), de a), $v_n = ar^{n-1}$, logo (v_n) será limitada/convergente sse r^{n-1} for limitada/convergente, ou seja, será limitada para $-1 \leq r \leq 1$, convergente para $-1 < r \leq 1$, a qualquer.

3. Baseando-se directamente na definição de limite de sucessão mostre que:

jpinto@math.tecnico.ulisboa.pt

a) $\dfrac{n^2}{n^2+1} \to 1.$ b) $\dfrac{n+3}{n+2} \not\to \frac{3}{2}.$

RESOLUÇÃO:

a) Seja $\varepsilon > 0$. Para determinarmos os valores de $n \in \mathbb{N}$ para os quais $\frac{n^2}{n^2+1}$ está a uma distância do (suposto) limite 1 menor do que ε, resolvemos

$$\left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n^2+1} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Se $\frac{1}{\varepsilon} - 1 > 0 \Leftrightarrow \varepsilon < 1$, temos então

$$n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| < \varepsilon\,.$$

Se $\frac{1}{\varepsilon} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \varepsilon \geq 1$, então $n^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, e

$$n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| < \varepsilon\,.$$

Demonstrou-se assim que, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, pode tomar-se $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| < \varepsilon$$

ou seja, $\dfrac{n^2}{n^2+1} \to 1$.

(a) Para determinar a distância de $u_n = \frac{n+3}{n+2}$ a $\frac{3}{2}$,

$$\left|\frac{n+3}{n+2} - \frac{3}{2}\right| = \left|1 + \frac{1}{n+2} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2}\right| = -\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2}$$

(dado que $\frac{1}{n+2} - \frac{1}{2} < 0$, para qualquer n). Assim, dado $\varepsilon > 0$, temos

$$|u_n - \frac{3}{2}| < \varepsilon \Leftrightarrow u_n \in V_\varepsilon(3/2) \Leftrightarrow -\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+2} > \frac{1}{2} - \varepsilon.$$

Se $\varepsilon \geq 1/2$ esta condição verifica-se para qualquer $n \in \mathbb{N}$, mas se $\varepsilon < 1/2$, temos $u_n \in V_\varepsilon(3/2) \Leftrightarrow n < \frac{1}{1/2-\varepsilon} - 2$, ou seja, só se verifica (no máximo) para um conjunto finito de valores de n, e portanto $3/2$ não é limite de u_n.

4. Sendo x_n o termo geral de uma sucessão monótona, y_n o termo geral de uma sucessão

jpinto@math.tecnico.ulisboa.pt

limitada e supondo verificada a condição

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$$

prove que x_n é limitada e que as duas sucessões são convergentes para o mesmo limite.
RESOLUÇÃO:

De $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos que $y_n - \frac{1}{n} < x_n < y_n + \frac{1}{n} \Rightarrow y_n - 1 < x_n < y_n + 1 \Rightarrow a - 1 < x_n < b + 1$, em que $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a < y_n < b$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Logo (x_n) é limitada. Como é monótona, será convergente. De $x_n - \frac{1}{n} < y_n < x_n + \frac{1}{n}$, e $\lim(x_n + \frac{1}{n}) = \lim(x_n - \frac{1}{n}) = \lim x_n$, conclui-se do critério das sucessões enquadradas, que (y_n) é convergente e $\lim y_n = \lim x_n$.

5. Estude quanto à convergência as sucessões de termos gerais:

$$u_n = \cos(n!\pi), \quad v_n = \frac{n\cos(n\pi)}{2n+1}, \quad w_n = \frac{1+a^n}{1+a^{2n}} \quad (a \in \mathbb{R}).$$

RESOLUÇÃO:

$u_n = \cos(n!\pi)$: como, para $n > 1$, $n!$ é um número natural par, temos $\cos(n!\pi) = 1$, para qualquer $n > 1$. Logo, (u_n) é convergente, com $\lim u_n = 1$,

$v_n = \dfrac{n\cos(n\pi)}{2n+1}$: temos $\cos(n\pi) = (-1)^n$ e $\dfrac{n}{2n+1} \to \dfrac{1}{2}$, logo (v_n) terá dois sublimites diferentes, $\frac{1}{2}$ e $-\dfrac{1}{2}$, e não é convergente.

$w_n = \dfrac{1+a^n}{1+a^{2n}}$ $(a \in \mathbb{R})$. Tem-se $\lim w_n = 1$ se $|a| < 1$ ou $a = 1$, não tem limite se $a = -1$, $\lim w_n = 0$ se $|a| > 1$.

6. Mostre que se (u_n) é uma sucessão convergente tal que $u_{2n} \in]0,1[$ e $u_{2n+1} \in \mathbb{R} \setminus]0,1[$ então $\lim u_n \in \{0,1\}$.
RESOLUÇÃO:

Se (u_n) é convergente, com $\lim u_n = a$, serão também as suas subsucessões (u_{2n}) e (u_{2n+1}), com $\lim u_{2n} = \lim u_{2n+1} = a$. Por outro lado,

$$u_{2n} \in]0,1[\Rightarrow a \in [0,1],$$

$$u_{2n+1} \in \mathbb{R} \setminus]0,1[=]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\Rightarrow a \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[.$$

Logo, $a \in \{0,1\}$.

7. Sejam A e B os conjuntos $A = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $B = \left\{-\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_1\right\}$. Diga, justificando, quais das seguintes proposições são verdadeiras. Para as que forem falsas forneça um contra-exemplo:

   a) Toda a sucessão de termos em A que seja limitada é convergente.

   b) Qualquer sucessão monótona de termos em $A \cap V_{1/2}(0)$ tem limite real.

   c) Qualquer sucessão de termos em $A \cup B$ que seja estritamente decrescente tem limite em $\mathbb{R}_0^+$.

   RESOLUÇÃO:

   a) Falso: por exemplo, $u_n = 3 + (-1)^n$, é limitada, tem termos em A e não é convergente, uma vez que tem dois sublimites diferentes: 2 e 4.

   b) Verdadeiro: se (u_n) é monótona e tem termos em $A \cap V_{1/2}(0)$, será monótona e limitada, logo convergente em $\mathbb{R}$.

   c) Verdadeiro: se (u_n) é uma sucessão de termos em $A \cup B$ com $\lim u_n = a < 0$ então $u_n < \frac{a}{2}$ a partir de certa ordem. Em particular, $u_n \in B$ e o conjunto $B \cap \{x : x < \frac{a}{2}\}$ é finito. Logo (u_n) não poderia ser estritamente decrescente.

8. Considere a sucessão real (u_n) definida por recorrência por:

$$u_1 = 2, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$$

   a) Mostre que $u_n \in \mathbb{Q}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ (Sug. Use indução).

   b) Assumindo que (u_n) é convergente, mostre que $\lim u_n = \sqrt{2}$.

   RESOLUÇÃO:

   a) Por indução: $u_1 = 2 \in \mathbb{Q}$. Por outro lado, se $u_n \in \mathbb{Q}$, então $u_n/2 \in \mathbb{Q}$ e também o seu inverso $1/u_n \in \mathbb{Q}$. Logo, $u_{n+1} \in \mathbb{Q}$, sendo a soma de dois racionais.

   b) Se u_n é convergente, com $u_n \to L$, então também temos $u_{n+1} \to L$ (dado que u_{n+1} é subsucessão de u_n). Tomando o limite de ambos os lados da expressão de recorrência:

$$\lim u_{n+1} = \lim\left(\frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}\right) \Rightarrow L = \frac{L}{2} + \frac{1}{L} \Leftrightarrow L^2 = 2 \Leftrightarrow L = \pm\sqrt{2}.$$

   É fácil ver (por indução outra vez) que $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, logo $L = -\sqrt{2}$ é impossível. Conclui-se que $L = \sqrt{2}$.

9. Considere a sucessão real (u_n) definida por recorrência por:

$$u_1 = a, \qquad u_{n+1} = (-1)^n u_n + \frac{u_n}{n+1},$$

com $a \in \mathbb{R}$. Mostre que se (u_n) é convergente então $\lim u_n = 0$.

RESOLUÇÃO:

Seja (u_n) tal que $u_1 = a$, para $a \in \mathbb{R}$, e $u_{n+1} = (-1)^n u_n + \frac{u_n}{n+1}$. Se (u_n) é convergente, com $\lim u_n = l$, temos que

- $\frac{u_n}{n+1}$ é convergente, com $\lim \frac{u_n}{n+1} = \lim u_n \cdot \frac{1}{n+1} = l \cdot 0 = 0$
- (u_{n+1}) é convergente, uma vez que é uma subsucessão de (u_n), com $\lim u_{n+1} = \lim u_n = l$.

Logo, $(-1)^n u_n = u_{n+1} - \frac{u_n}{n+1}$ é também convergente. Mas, considerando as subsucessão dos termos pares e dos termos ímpares, temos $(-1)^{2n} u_{2n} = u_{2n} \to l$ e $(-1)^{2n+1} u_{2n+1} = -u_{2n+1} \to -l$. Como $(-1)^n u_n$ converge, tem-se $l = -l \Leftrightarrow 2l = 0 \Leftrightarrow l = 0$, como queríamos mostrar.

10. Considere a sucessão real (u_n) dada por:

$$\begin{cases} u_1 = 1, \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n}{2} \end{cases}.$$

a) Mostre usando indução que $u_n \leq 2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

b) Mostre que (u_n) é uma sucessão crescente.

c) Mostre que (u_n) é convergente e indique $\lim u_n$.

RESOLUÇÃO:

a) $u_n \leq 2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$:
Para $n = 0$ temos $u_0 = 1 \leq 2$. Supondo $u_n \leq 2$ para um certo $n \in \mathbb{N}$, consideremos u_{n+1}:

$$u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{2} \leq 1 + \frac{2}{2} = 2.$$

Por indução conclui-se que $u_n \leq 2$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

b) (u_n) é uma sucessão crescente:
Com $n \geq 0$ e tendo em conta a alínea (a):

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{u_n}{2} - u_n = 1 - \frac{u_n}{2} \geq 1 - \frac{2}{2} = 0$$

e portanto (u_n) é uma sucessão crescente.

c) De (a) e (b) decorre que (u_n) é crescente e majorada, pelo que é convergente. Da definição de (u_n), e uma vez que sendo (u_{n+1}) uma subsucessão de (u_n), teremos (u_{n+1}) convergente com $\lim u_{n+1} = \lim u_n$, segue que

$$\lim u_n = 1 + \frac{\lim u_n}{2}.$$

Resolvendo a equação em ordem a $\lim u_n$, obtem-se

$$\lim u_n - \frac{\lim u_n}{2} = 1 \Leftrightarrow \lim u_n = 2.$$

11. Seja $u_1 > 1$ e $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$ para $n \in \mathbb{N}_1$. Mostre que u_n é convergente e calcule $\lim u_n$. (Sugestão: começe por provar por indução matemática que $1 < u_n < 2$, para todo o inteiro $n \geq 2$.)

    RESOLUÇÃO:

    Notemos que, se $x > 1$, então $0 < \frac{1}{x} < 1$ e, portanto $1 < 2 - \frac{1}{x} < 2$. Como $u_1 > 1$, concluimos que $1 < u_2 < 2$. Por outro lado, se, como hipótese de indução, considerarmos $1 < u_n < 2$, então, usando o mesmo argumento concluimos que $1 < u_{n+1} < 2$. Provamos assim que $\forall_{n \in \mathbb{N}_2}$, $1 < u_n < 2$, e que, portanto, a sucessão é limitada.

    Como $u_{n+1} - u_n = 2 - \frac{1}{u_n} - u_n = -\frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{u_n} = -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n} < 0$, dado que, como vimos $u_n > 1$, concluimos que u_n é decrescente. Logo a sucessão é monótona e limitada e, portanto, convergente.

    Seja $l = \lim u_n$. Então, dado que $\lim u_{n+1} = \lim u_n$, temos

$$\lim u_{n+1} = \lim\left(2 - \frac{1}{u_n}\right) \quad \Leftrightarrow \quad l = 2 - \frac{1}{l} \quad \Leftrightarrow \quad l = 1.$$

12. Seja (u_n) a sucessão definida por recorrência por $u_1 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

    a) Prove por indução que $1 \leq u_n < 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.
    b) Prove por indução que (u_n) é crescente.
       (Alternativamente, verifique que $u_{n+1} - u_n = \frac{(2-u_n)(u_n+1)}{u_n + \sqrt{2+u_n}}$.)
    c) Justifique que (u_n) é convergente.
    d) Aplicando limites a ambos os membros da expressão de recorrência, determine o limite de (u_n).

    RESOLUÇÃO:

    a) $1 \leq u_n < 2$, para $n \in \mathbb{N}$:
        - $n = 1$: $u_1 = 1$, logo $1 \leq u_1 < 2$ é uma proposição verdadeira.
        - Hipótese de indução: $1 \leq u_n < 2$, para certo $n \in \mathbb{N}$. Queremos ver que também $1 \leq u_{n+1} < 2$. Como $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$, usando a hipótese de indução temos $\sqrt{2+1} \leq u_{n+1} < \sqrt{2+2} \Leftrightarrow \sqrt{3} \leq u_{n+1} < 2 \Rightarrow 1 \leq u_{n+1} < 2$.

b) (u_n) é crescente: vamos usar indução matemática para mostrar que $u_{n+1} \geq u_n$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

- $n = 1$: $u_1 = 1$, $u_2 = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$, logo $u_2 > u_1$ é uma proposição verdadeira.
- Hipótese de indução: $u_{n+1} \geq u_n$, para certo $n \in \mathbb{N}$. Queremos ver que também $u_{n+2} \geq u_{n+1}$. Temos $u_{n+2} = \sqrt{2 + u_{n+1}}$, e, de $u_{n+1} \geq u_n$, vem que $\sqrt{2 + u_{n+1}} \geq \sqrt{2 + u_n}$, ou seja, que $u_{n+2} \geq u_{n+1}$, como queriamos mostrar.

c) (u_n) é monótona crescente e limitada, logo convergente.

d) Seja $l = \lim u_n$. Então, dado que $\lim u_{n+1} = \lim u_n$, temos

$$\lim u_{n+1} = \lim \sqrt{2 + u_n} \Leftrightarrow l = \sqrt{2 + l} \Leftrightarrow l^2 = 2 + l \wedge l \geq 0 \Leftrightarrow l = 2.$$

13. Prove, recorrendo à definição de limite em $\overline{\mathbb{R}}$ que

a) $1 - \sqrt{n} \to -\infty$.

b) $\dfrac{n^2+1}{n} \to +\infty$.

RESOLUÇÃO:

a) Por definição, $u_n \to -\infty$ em $\overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow$ dado $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para $n > p$, $u_n < -\frac{1}{\varepsilon}$[3]. Seja então $\varepsilon > 0$ dado,

$$1 - \sqrt{n} < -\frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \sqrt{n} > 1 + \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)^2.$$

Seja $p \in \mathbb{N}$ tal que $p > \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)^2$. para $n > p$, temos $1 - \sqrt{n} < -\frac{1}{\varepsilon}$. Logo $1 - \sqrt{n} \to -\infty$.

14. a) Mostre que:

i) se $u_n \to +\infty$ em $\overline{\mathbb{R}}$ então $\frac{1}{u_n} \to 0$,

ii) se $u_n > 0$ e $u_n \to 0$ então $\frac{1}{u_n} \to +\infty$ em $\overline{\mathbb{R}}$.

b) Será verdade que $u_n \to 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{u_n} \to +\infty \vee \frac{1}{u_n} \to -\infty\right)$?

RESOLUÇÃO:

a) i) Por definição, $u_n \to +\infty$ em $\overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow$ dado $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para $n > p$, $u_n > \frac{1}{\varepsilon}$. Neste caso, temos $u_n > 0$, para $n > p$, logo

$$n > p \Rightarrow u_n > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{u_n} < \varepsilon,$$

e assim $\frac{1}{u_n} \to 0$.

b) Não. Por exemplo, $u_n = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$ e $\frac{1}{u_n} = (-1)^n n$ não é convergente em $\overline{\mathbb{R}}$.

15. Determine, se existirem, os limites em $\overline{\mathbb{R}}$ das sucessões que têm por termo de ordem n:

a) $\dfrac{n^n}{1000^n}$,
b) $\dfrac{(2n)!}{n!}$
c) $n^{n+1} - n^n$
d) $3^n - (2n)!$
e) $(n! - n^{1000})^n$
f) $\dfrac{n^{1000}}{1.0001^n}$
g) $\dfrac{5^n - n^4}{3^n + n!}$
h) $\dfrac{n^n - n!}{3^n + n^4 + 2}$.

RESOLUÇÃO:

a) $\dfrac{n^n}{1000^n} = \left(\dfrac{n}{1000}\right)^n$. Como $\lim \dfrac{n}{1000} = +\infty$, temos $\lim \dfrac{n^n}{1000^n} = +\infty$.
Alternativamente, como

$$\lim \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{1000^{n+1}}}{\frac{n^n}{1000^n}} = \lim \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\,\frac{1000^n}{1000^{n+1}} = \frac{(n+1)}{1000}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = +\infty > 1$$

temos $\lim \frac{n^n}{1000^n} = +\infty$.

b) $\dfrac{(2n)!}{n!} = (n+1)(n+2)\dots(n+n) > n^n$. Como $\lim n^n = +\infty$, então $\lim \dfrac{(2n)!}{n!} = +\infty$.
Alternativamente, como

$$\lim \frac{\frac{(2(n+1))!}{(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{n!}} = \lim \frac{(2(n+1))!}{(2n)!}\,\frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{(2n+2)(2n+1)}{n+1} = +\infty > 1$$

temos $\lim \frac{(2n)!}{n!} = +\infty$.

c) $\lim n^{n+1} - n^n = \lim n^n(n-1) = +\infty$.

d) $\lim 3^n - (2n)! = \lim (2n)!\left(\frac{3^n}{(2n)!} - 1\right) = -\infty$, ja que pela escala de sucessoes $a^n << n!$ para qualquer $a > 1$, e $n! << (2n)!$.

e) $\lim (n! - n^{1000})^n = \lim \left(\frac{n!}{n^{1000}} - 1\right)^n n^{1000n} = +\infty$.

f) Como, para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ e $c > 1$, $\lim \frac{n^\alpha}{c^n} = 0$, tem-se $\lim \frac{n^{1000}}{1.0001^n} = 0$.

g) $\lim \dfrac{5^n - n^4}{3^n + n!} = \lim \dfrac{5^n(1 - n^4/5^n)}{n!(3^n/n! + 1)} = \lim \dfrac{5^n}{n!} = 0$, já que pela escala de sucessões $a^n << n!$ e $n^p << a^n$, $a > 1$, $p \in \mathbb{N}$.

h) $\lim \dfrac{n^n - n!}{3^n + n^4 + 2} = \lim \dfrac{n^n(1 - n!/n^n)}{3^n(1 + n^4/3^n + 2/3^n)} = +\infty$, já que $n! << n^n$, $3^n << n^n$ e $n^4 << 3^n$.