3.2 T. Rolle, Lagrange e Cauchy

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Mostre que a equação $x^5 + 5x = 5$ tem uma única solução em $\mathbb{R}$.

   RESOLUÇÃO

Seja $f(x) = x^5+5x-5$. Então f é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$. Temos $f'(x) = 5(x^4+1) > 0$, em $\mathbb{R}$, logo f é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ e existirá no máximo uma solução da equação acima (ou Teorema de Rolle: se f tivesse dois zeros, então f' teria pelo menos um, como não é esse o caso, f tem no máximo um zero).

Por outro lado, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, logo como f é contínua, conclui-se do Teorema do Valor Intermédio / Bolzano, que f tem pelo menos um zero (aliás $CD_f = \mathbb{R}$).

2. Mostre que a equação $3x^2 = e^x$ tem exactamente três soluções em $\mathbb{R}$.

   RESOLUÇÃO

Seja $f(x) = 3x^2 - e^x$. Então f é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$.

- f tem pelo menos 3 zeros: Teo. Valor Intermédio (Bolzano) Uma vez que

  $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad f(0) = -1$$

  conclui-se do Teorema do Valor Intermédio que f tem um zero em $]-\infty, 0[$. Por outro lado,

  $$f(1) = 3 - e > 0, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

  logo, de novo pelo Teorema do Valor Intermédio, f tem um zero em $]0, 1[$ e também terá um zero em $]1, +\infty[$. Conclui-se que f tem pelo menos 3 zeros.
- f tem no máximo 3 zeros: Teo. Rolle

  Para vermos que não pode ter mais do que 3 zeros, calculamos as suas derivadas:

  $$f'(x) = 6x - e^x, \quad f''(x) = 6 - e^x.$$

  Como e^x é injectiva, f'' tem um único zero. Logo, do Teorema de Rolle, f terá no máximo três zeros.

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 - x^{\frac{2}{3}}$. Verifique que $f(-1) = f(1) = 0$, mas a derivada de f não se anula em $[-1, 1]$. Justique que este facto não contraria o Teorema de Rolle.

   RESOLUÇÃO

É claro que $f(-1) = f(1) = 0$ e que para $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}} \neq 0$. Não contraria o Teorema de Rolle dado que f não é diferenciável em todos os pontos de $]-1,1[$ (não é diferenciável em 0).

4. Prove que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável e o seu gráfico cruza a recta $y = x$ em três pontos, então f'' tem pelo menos um zero.

   RESOLUÇÃO

   Note-se primeiro que o gráfico de f cruza a recta $y = x$ em três pontos sse a equação $f(x) = x$ tem três soluções. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - x$. Então, g tem três zeros. Logo, do Teorema de Rolle aplicado a g e a g', g' tem pelo menos dois zeros e g'' tem pelo menos um zero. Mas

$$g'(x) = f'(x) - 1 \Rightarrow g''(x) = f''(x).$$

   Logo f'' tem pelo menos um zero.

5. Seja $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0, \qquad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

   Diga se cada uma das seguintes proposições é verdadeira ou falsa. Justifique as respostas.

   a) Para qualquer $n \geq 2$, a restrição da função f ao intervalo $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ tem necessariamente um máximo.
   b) A função f é necessariamente limitada.
   c) A função f' tem necessariamente infinitos zeros.

   RESOLUÇÃO

   a) Verdadeira, uma vez que f sendo diferenciável em $]0,1[$ será também contínua em qualquer intervalo $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, para $n \geq 2$. Logo, pelo Teorema de Weierstrass tem máximo e mínimo no intervalo fechado $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$.
   b) Falsa: por exemplo, a função $f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{\pi}{x}$ verifica $f\left(\frac{1}{n+1}\right) = 0$ e f não é limitada (justifique!).
   c) Verdadeira: para $n \geq 2$, f é contínua em $[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$ e diferenciável em $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$, com $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n+1}\right)$. Logo, do Teorema de Rolle, f' tem um zero em $\left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

6. Use o Teorema de Lagrange num intervalo adequado para provar a seguinte relação:

$$\frac{x-1}{x} < \ln x < x-1, \quad \text{para } x > 1.$$

RESOLUÇÃO

Aplicando o Teorema Lagrange a $\ln x$ em $[1, x]$, temos $\dfrac{\ln x}{x-1} = \dfrac{1}{c_x}$, $1 < c_x < x$. De $1 < c_x < x$ vem que $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{c_x} < 1$, logo (uma vez que $x - 1 > 0$),

$$\frac{1}{x} < \frac{\ln x}{x-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} < \ln x < x-1.$$

7. Prove que se $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ é diferenciável e satisfaz $f(n) = (-1)^n$, para $n \in \mathbb{N}$, então a sua derivada não tem limite no infinito.

RESOLUÇÃO

Se $f(n) = (-1)^n$, então $f(n+1) - f(n) = (-1)^{n+1} - (-1)^n = 2(-1)^{n+1}$. Agora, como f é diferenciável em $\mathbb{R}^+$, é contínua em $[n, n+1]$ e diferenciável em $]n, n+1[$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Do Teorema de Lagrange temos então que existe $c_n \in]n, n+1[$ tal que

$$\frac{f(n+1) - f(n)}{(n+1) - n} = f'(c_n) \Leftrightarrow f'(c_n) = 2(-1)^{n+1}$$

e concluimos que $f'(c_n)$ é uma sucessão divergente (tem dois sublimites, -2 e 2). Como $n < c_n < n+1$, temos que $c_n \to +\infty$, logo f' não tem limite no infinito (se tivesse, $f'(c_n)$ seria convergente).

8. a) Seja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ diferenciável, tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$. Mostre que se existe $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = L$ então $L = 0$.

   b) Seja $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ diferenciável, tal que h tem uma assíntota à direita em $y = mx + b$. Mostre que se existe $\lim_{x\to+\infty} h'(x) = L$ então $L = m$.

RESOLUÇÃO

a) Aplicando o Teorema de Lagrange a f no intervalo $[x, x+1]$, temos $f(x+1) - f(x) = f'(c_x)$, em que $x < c_x < x+1$. Fazendo $x \to +\infty$, temos $c_x \to +\infty$, logo dado que $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ existe,

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} f'(c_x) = \lim_{x\to+\infty} f(x+1) - f(x) = b - b = 0.$$

b) Aplicar a) à função $f(x) = h(x) - mx$.

9. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ e cuja derivada é uma função crescente. Mostre que a função definida por $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ é crescente em $\mathbb{R}^+$.
(Sugestão: Aplique o Teorema de Lagrange a f num intervalo adequado para mostrar que $g'(x) \geq 0$.)

RESOLUÇÃO

A função g será diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e portanto será crescente em $\mathbb{R}^+$ se $g'(x) \geq 0$ para $x > 0$. Temos, para $x > 0$,

$$g'(x) \geq 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \geq 0 \ \Leftrightarrow \ xf'(x) \geq f(x) \ \Leftrightarrow \ f'(x) \geq \frac{f(x)}{x}.$$

Para provar esta desigualdade, aplicamos o Teorema de Lagrange à função f no intervalo $[0, x]$. Temos que, como $f(0) = 0$,

$$\frac{f(x)}{x} = f'(c)$$

para algum $c \in]0, x[$. Como f' é crescente, $c < x \Rightarrow f'(c) \leq f'(x)$.

10. Supondo que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 em $[a, b]$ (com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$), [1] mostre que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y| \qquad \text{para quaisquer } x, y \in [a, b].$$

RESOLUÇÃO

Sejam $x, y \in [a, b]$, com $x < y$, por ex. Aplicando o teorema de Lagrange no intervalo $[x, y]$, temos $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(c)$, para algum $c \in]x, y[$. Como f' é contínua em $]a, b[$ e tem limites laterais em a e b, é limitada em $[a, b]$, logo

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| = |f'(c)| \leq C \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|.$$

11. Calcule os limites, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$:

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$,

b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x + e^x)}{x}$,

c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arcsen}(x)}{x}$,

d) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{x^4}$,

e) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}$,

f) $\displaystyle\lim_{x \to 1} (\ln x \cdot \ln \ln x)$,

[1] Diz-se que f é de classe C^1 em $[a, b]$ sse f é contínua em $[a, b]$, f' é contínua em $]a, b[$ e existem $\lim_{x \to a^+} f'(x)$, $\lim_{x \to b^-} f(x)$ (i.e., f' é prolongável por continuidade a $[a, b]$).

g) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}$,

h) $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-1/x}}{x}$,

i) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x}$.

j) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$,

k) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2^x}{x^2}$,

l) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2^x}{x^2}$,

m) $\lim_{x\to 1} (x-1)^2 \left(1 - \cos \frac{1}{1-x}\right)$,

n) $\lim_{x\to +\infty} (x-1)^2 \left(1 - \cos \frac{1}{1-x}\right)$,

o) $\lim_{x\to +\infty} \ln x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$,

p) $\lim_{x\to 0^+} \ln x \operatorname{sen} \sqrt{x}$,

NOTA: Nas resoluções seguintes, quando escrevemos a igualdade

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{RC}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

estamos a assumir como verificado que o limite à direita existe em $\overline{\mathbb{R}}$ (mesmo que não seja explicitamente referido). Se $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ não existe em $\overline{\mathbb{R}}$, então a Regra de Cauchy não é aplicável.

RESOLUÇÃO

a) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Pela Regra de Cauchy (uma vez que se verifica que o limite à direita existe):

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} \overset{RC}{=} \lim_{x\to 0} \ln a \cdot a^x - \ln b \cdot b^x = \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}.$$

b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x+e^x)}{x}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Pela Regra de Cauchy (duas vezes - uma vez que temos de novo uma indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$ e se verifica que o limite à direita existe):

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x+e^x)}{x} \overset{RC}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{1+e^x}{x+e^x} \overset{RC}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 1.$$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen}(x)}{x}$, é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Usando a Regra de Cauchy (uma vez que se verifica que o limite à direita existe):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen}(x)}{x} \overset{RC}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = 1.$$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{x^4}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Fazendo $y = x^2$ e usando a Regra de Cauchy (uma vez que o limite à direita existe):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{x^4} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\operatorname{arctg}(y)}{y^2} \overset{RC}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+y^2}}{2y} = +\infty.$$

jpinto@math.tecnico.ulisboa.pt

e) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Fazendo $y = 1/x$ e usando a Regra de Cauchy (uma vez que o limite à direita existe):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen}\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{arctg} y}{\operatorname{sen} y} \overset{RC}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\frac{1}{1+y^2}}{\cos y} = 1.$$

f) $\lim_{x\to 1}(\ln x \cdot \ln\ln x)$ é uma indeterminação do tipo $0\cdot\infty$. Escrevendo

$$\lim_{x\to 1} \ln x \cdot \ln\ln x = \lim_{x\to 1} \frac{\ln\ln x}{\frac{1}{\ln x}}$$

temos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, e pela Regra de Cauchy (uma vez que o limite à direita existe),

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln\ln x}{\frac{1}{\ln x}} \overset{RC}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x\ln x}}{-\frac{1}{x\ln^2 x}} = \lim_{x\to 1} -\ln x = 0.$$

g) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Escrevendo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x}},$$

temos uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$, e pela Regra de Cauchy (uma vez que o limite à direita existe),

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x}} \overset{RC}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}e^{1/x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{e^{1/x}} = 0.$$

(Nota: a Regra de Cauchy aplicada directamente a $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x}$ não simplifica a questão. . .)

h) $\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} e^{-1/x} = -\infty \cdot +\infty = -\infty.$

(Note que a Regra de Cauchy *não* é aplicável!)

i) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x} \cdot x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 1\cdot 0 = 0.$

(Note que não existe $\lim_{x\to 0^+} \frac{(x^2 \operatorname{sen}\frac{1}{x})'}{(\operatorname{sen} x)'}$ logo a Regra de Cauchy não é aplicável.)

j) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x - \operatorname{sen} x}{x^3}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando a Regra de Cauchy (três vezes - uma vez que obtemos indeterminações $\frac{0}{0}$ e o limite à direita existe):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x - \operatorname{sen} x}{x^3} \overset{RC}{=} \ldots \overset{RC}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch} x + \cos x}{6} = \frac{1}{3}.$$

k) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x^2}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando a Regra de Cauchy (duas vezes - uma vez que o limite à direita existe):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x}{x^2} \overset{RC}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln 2 \cdot 2^x}{2x} \overset{RC}{==} lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln 2)^2 \cdot 2^x}{2} = +\infty.$$

l) $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{2^x}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} 2^x = 0 \cdot 0 = 0.$

m) $\lim\limits_{x\to 1} (x-1)^2 \left(1 - \cos \dfrac{1}{1-x}\right) = 0$, por enquadramento, já que $(x-1)^2 \to 0$, e $0 < 1 - \cos \frac{1}{1-x} < 2$, logo

$$0 < (x-1)^2 \left(1 - \cos \frac{1}{1-x}\right) < 2(x-1)^2.$$

(A Regra de Cauchy *não* é aplicável.)

n) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)^2 \left(1 - \cos \dfrac{1}{1-x}\right)$, é uma indeterminação do tipo $\infty \cdot 0$. Temos, fazendo $y = \dfrac{1}{1-x}$,

$$\lim_{x\to+\infty} (x-1)^2 \left(1 - \cos \frac{1}{1-x}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{1 - \cos y}{y^2} \overset{RC}{=} \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{2y} = \frac{1}{2}.$$

o) $\lim_{x\to+\infty} \ln x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ é uma indeterminação do tipo $\infty \cdot 0$. Temos, fazendo $y = \dfrac{1}{x}$ e usando a Regra de Cauchy (uma vez que o limite à direita existe):

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \lim_{y\to 0^+} -\ln y \operatorname{sen} y = \lim_{y\to 0^+} \frac{\ln y}{-\frac{1}{\operatorname{sen} y}}$$

$$\overset{RC}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{\frac{1}{y}}{\frac{\cos y}{\operatorname{sen}^2 y}} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 y}{y \cos y} = 0$$

já que $\lim_{y\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$ (ou RC mais uma vez).

12. Calcule os limites, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$:

(a) $\lim\limits_{x\to 1^+} x^{\ln\ln x}$,

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x-1}}$.

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$,

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$,

(e) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$,

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\operatorname{sen} \dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

RESOLUÇÃO

(a) $\lim_{x\to 1^+} x^{\ln\ln x}$ é uma indeterminação do tipo 1^∞. Temos

$$\lim_{x\to 1^+} x^{\ln\ln x} = \lim_{x\to 1^+} e^{\ln\left(x^{\ln\ln x}\right)} = \lim_{x\to 1^+} e^{\ln\ln x \ln x} = e^{\lim_{x\to 1^+} \ln\ln x \ln x}.$$

Vimos no exercício anterior 11.f), $\lim_{x\to 1^+} \ln(\ln x)\ln(x) = 0$ logo

$$\lim_{x\to 1^+} x^{\ln\ln x} = e^0 = 1.$$

(b) $\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x-1}}$ é uma indeterminação do tipo ∞^0. Temos

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x-1}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x-1}\ln x} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1}\ln x}.$$

Agora, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1}\ln x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x-1}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e aplicando a Regra de Cauchy (uma vez que o limite à direita existe),

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x-1} \overset{RC}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Logo,

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x-1}} = e^0 = 1.$$

(c) $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$ é uma indeterminação do tipo 0^0. Temos

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} = e^{\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln \operatorname{sen} x}.$$

Temos que $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln \operatorname{sen} x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \operatorname{sen} x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando a Regra de Cauchy (uma vez que o limite à direita existe)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \operatorname{sen} x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} \overset{RC}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x = 0.$$

Logo

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} = e^0 = 1.$$

(d) $\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$ é uma indeterminação do tipo ∞^0. Temos

$$\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln\ln x}.$$

Agora $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln\ln x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\ln x}{x}$ é uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e temos

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\ln x}{x} \overset{RC}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\ln x} = 0$$

logo $\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = 1$.

(e) $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ é uma indeterminação do tipo ∞^0. Temos

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

já que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2} \overset{RC}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

(f) $\lim_{x\to+\infty}\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$ é uma indeterminação do tipo 0^0. Temos

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)}{\ln x}} = e^{-1}$$

já que, fazendo $y = 1/x$, e pela Regra de Cauchy (já que o limite à direita existe),

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right)}{\ln x} = \lim_{y\to 0^+}\frac{\ln(\operatorname{sen} y)}{-\ln y} \overset{RC}{=} \lim_{y\to 0^+}\frac{\frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}}{-\frac{1}{y}} = \lim_{y\to 0^+}\frac{-y\cos y}{\operatorname{sen} y} = -1.$$

13. Calcule $\lim\left(\frac{1}{n}\right)^{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$. (Sugestão: determine primeiro $\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x}$).

RESOLUÇÃO

14. $\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x}$ é uma indeterminação do tipo 0^0. Temos que

$$\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} e^{\operatorname{sen} x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0}\operatorname{sen} x\ln x}.$$

Vamos calcular $\lim_{x\to 0}\operatorname{sen} x\ln x$, que é uma indeterminação do tipo $0\cdot\infty$. Escrevendo $\operatorname{sen} x\ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$ ficamos com uma indeterminação do tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e podemos usar a Regra de Cauchy (uma vez que o limite à direita existe):

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} &\overset{RC}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}}\\ &= \lim_{x\to 0} -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x\cos x}\\ &= \lim_{x\to 0} -\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -1\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Logo, $\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen} x} = e^0 = 1$.

Pela definição de limite, como $\frac{1}{n} \to 0$, temos agora

$$\lim \left(\frac{1}{n}\right)^{\operatorname{sen}\frac{1}{n}} = 1.$$

15. Prove por indução matemática que, para qualquer $p \in \mathbb{N}$, se tem:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{e^x} = 0.$$

RESOLUÇÃO

Para $p = 1$, aplicando a Regra de Cauchy, temos $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x} \overset{RC}{=} \lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$.

Assumindo por hipótese de indução que $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^p}{e^x} = 0$ para um dado $p \in \mathbb{N}$, usamos de novo a Regra de Cauchy para calcular

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x} \overset{RC}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(p+1)x^p}{e^x} = (p+1)\cdot 0 = 0.$$