4 CÁLCULO INTEGRAL

4.1 Primitivação

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Usando o método de primitivação por partes, calcule uma primitiva de cada uma das funções:

a) $x \cos x$,
b) $x \ln x$,
c) $x^2 \operatorname{sen} x$,
d) $\ln(1+x)$,
e) $\cos^2 x$,
f) $\operatorname{sen}^3 x$,
g) $\operatorname{arcsen} x$,
h) $x \operatorname{arctg} x$,
i) $\ln^3 x$,
j) $\operatorname{sen} x \ln(1 + \operatorname{sen} x)$,
k) $\sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x}$,
l) $\dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$,
m) $\dfrac{x^7}{(1-x^4)^2}$.

RESOLUÇÃO

a) Com $u' = \cos x \Rightarrow u = \operatorname{sen} x$ e $v = x \Rightarrow v' = 1$, temos

$$P(x \cos x) = x \operatorname{sen} x - P(\operatorname{sen} x) = x \operatorname{sen} x + \cos x.$$

b) Com $u' = x \Rightarrow u = x^2/2$ e $v = \ln x \Rightarrow v' = 1/x$, temos

$$P(x \ln x) = \frac{x^2 \ln x}{2} - P\left(\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\right) = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4}.$$

c) Com $u' = \operatorname{sen} x \Rightarrow u = -\cos x$ e $v = x^2 \Rightarrow v' = 2x$, temos (usando a))

$$P\left(x^2 \operatorname{sen} x\right) = -x^2 \cos x + P(2x \cos x) = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x.$$

d) Com $u' = 1 \Rightarrow u = x$ e $v = \ln(1+x) \Rightarrow v' = \frac{1}{1+x}$, temos

$$P(\ln(1+x)) = x \ln(1+x) - P\left(\frac{x}{1+x}\right) = x \ln(1+x) - P\left(1 - \frac{1}{1+x}\right) = (x+1)\ln(1+x) - x.$$

(Também podíamos ter tomado $u = x + 1$.)

e) Com $u' = \cos x \Rightarrow u = \operatorname{sen} x$ e $v = \cos x \Rightarrow v' = -\operatorname{sen} x$, temos

$$\begin{aligned} P\left(\cos^2 x\right) &= \operatorname{sen} x \cos x + P\left(\operatorname{sen}^2 x\right) = \operatorname{sen} x \cos x + P\left(1 - \cos^2 x\right) \\ &= \operatorname{sen} x \cos x + x - P\left(\cos^2 x\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$2P\left(\cos^2 x\right) = \operatorname{sen} x \cos x + x \iff P\left(\cos^2 x\right) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x \cos x + x).$$

f) Com $u' = \operatorname{sen} x \Rightarrow u = -\cos x$ e $v = \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow v' = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, temos

$$P\left(\operatorname{sen}^3 x\right) = -\cos x \operatorname{sen}^2 x + P\left(2 \operatorname{sen} x \cos^2 x\right) = -\cos x - \frac{2}{3}\cos^3 x.$$

g) $P(\operatorname{arcsen} x) = x \operatorname{arcsen} x - P\left(x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1 - x^2}$,

h) $P(x \operatorname{arctg} x) = \dfrac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - P\left(\dfrac{x^2}{2} \dfrac{1}{1 + x^2}\right)$

$= \dfrac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{2} P\left(1 - \dfrac{1}{1 + x^2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(-x + (x^2 + 1) \operatorname{arctg} x\right)$,

i) Primitivando por partes 3 vezes, fazendo sempre $u' = 1$, com $v = \ln^3$ (e depois $v = \ln^2$, e $v = \ln x$):

$$\begin{aligned} P(\ln^3 x) &= x \ln^3 x - P(3 \ln^2 x) \;=\; x(\ln^3 x - 3 \ln^2 x) + P(6 \ln x) \\ &= x(\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x) - P(6) \;=\; x(\ln^3 x - 3 \ln^2 x + 6 \ln x - 6). \end{aligned}$$

j) Fazendo $u' = \operatorname{sen} x \Rightarrow u = -\cos x$ e $v = \ln(1 + \operatorname{sen} x) \Rightarrow v' = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$ temos

$$\begin{aligned} P\left(\operatorname{sen} x \ln(1 + \operatorname{sen} x)\right) &= -\cos x \ln(1 + \operatorname{sen} x) + P\left(\frac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{sen} x}\right) \\ &= -\cos x \ln(1 + \operatorname{sen} x) + P\left(\frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{1 + \operatorname{sen} x}\right) \\ &= -\cos x \ln(1 + \operatorname{sen} x) + P\left(1 - \operatorname{sen} x\right) \\ &= -\cos x \ln(1 + \operatorname{sen} x) + x + \cos x. \end{aligned}$$

k) Com $u' = \sqrt{x} \Rightarrow u = \frac{2}{3} x^{3/2}$ e $v = \operatorname{arctg} \sqrt{x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$ temos

$$\begin{aligned} P\left(\sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x}\right) &= \frac{2}{3} x^{3/2} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - P\left(\frac{2}{3} x^{3/2} \frac{1}{2\sqrt{x}(1 + x)}\right) \\ &= \frac{2}{3} x^{3/2} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{1}{3} P\left(\frac{x}{1 + x}\right) \\ &= \frac{2}{3} x^{3/2} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{1}{3}(x - \ln(1 + x)) \end{aligned}$$

(note que $x > 0$ no domínio da função).

l) Com $u' = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = x(1+x^2)^{-1/2} \Rightarrow u = \sqrt{1+x^2}$ e $v = x^2 \Rightarrow v' = 2x$, temos

$$P\left(\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\right) = x^2\sqrt{1+x^2} - P\left(2x\sqrt{1+x^2}\right)$$
$$= x^2\sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

(OU fazendo primeiro a substituição $y = x^2$ temos

$$P\left(\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\right) = P\left(\frac{y}{2\sqrt{1+y}}\right)$$

e depois por partes.)

m) Com $u' = \frac{x^3}{(1-x^4)^2} \Rightarrow u = \frac{1}{4(1-x^4)}$ e $v = x^4$, temos

$$P\left(\frac{x^7}{(1-x^4)^2}\right) = P\left(x^4\frac{x^3}{(1-x^4)^2}\right) = x^4\frac{1}{4(1-x^4)} - P\left(4x^3\frac{1}{4(1-x^4)}\right)$$
$$= \frac{x^4}{4(1-x^4)} + \frac{1}{4}\ln(1-x^4).$$

(OU fazendo primeiro a substituição $y = x^4$.)

2. Calcule uma primitiva de cada uma das funções racionais, utlizando uma decomposição em fracções simples adequada:

a) $\dfrac{1}{x^2+x}$, b) $\dfrac{x+1}{x(x-1)^2}$, c) $\dfrac{x^2+x-4}{x(x^2+4)}$, d) $\dfrac{x+3}{x^4-x^2}$

RESOLUÇÃO:

a) $P\left(\frac{1}{x^2+x}\right) = P\left(\frac{1}{x(x+1)}\right)$. Usando a decomposição em fracções simples $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$ temos

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{Ax+A+Bx}{x(x+1)} = \frac{(A+B)x+A}{x(x+1)}$$

logo $A+B=0$ e $A=1$, ou seja, $A=1$ e $B=-1$. Temos então

$$P\left(\frac{1}{x^2+x}\right) = P\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) = \ln|x| - \ln|x+1| = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|.$$

b) Usando a decomposição em fracções simples $\frac{x+1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x(x-1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \\
&= \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2} \\
&= \frac{Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 - Bx + Cx}{x(x-1)^2} \\
&= \frac{(A+B)x^2 + (-2A - B + C)x + A}{x(x-1)^2}
\end{aligned}$$

logo $A + B = 0$, $-2A - B + C = 1$, $A = 1$, ou seja, $A = 1$, $B = -1$, $C = 2$. Temos então

$$P\left(\frac{x+1}{x(x-1)^2}\right) = P\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}\right) = \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{2}{x-1}.$$

c) Usando a decomposição em fracções simples $\frac{x^2+x-4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+x-4}{x(x^2+4)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} \\
&= \frac{Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx}{x(x^2+4)} \\
&= \frac{(A+B)x^2 + 4A + Cx}{x(x^2+4)}
\end{aligned}$$

logo $A + B = 1$, $C = 1$ e $4A = -4$, ou seja, $A = -1$, $B = 2$, $C = 1$. Temos então

$$P\left(\frac{x^2+x-4}{x(x^2+4)}\right) = P\left(-\frac{1}{x} + \frac{2x+1}{x^2+4}\right) = -\ln|x| + \ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right).$$

d) $P\left(\frac{x+3}{x^4-x^2}\right) = P\left(\frac{x+3}{x^2(x-1)(x+1)}\right)$, para $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Usando a decomposição em fracções simples

$$\frac{x+3}{x^2(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1}$$

tem-se $A = -1$, $B = -3$, $C = 2$, $D = -1$ (verifique). Logo,

$$P\left(\frac{x+3}{x^4-x^2}\right) = -\ln|x| + \frac{3}{x} + 2\ln|x-1| - \ln|x+1| = \frac{3}{x} + \ln\frac{(x-1)^2}{|x(x+1)|}.$$

3. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções, utilizando substituições apropriadas:

a) $\dfrac{1+\sqrt{x}}{x(4-\sqrt{x})}$, b) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt[3]{x^4})}$ c) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$,

d) $\dfrac{1}{1+e^{2x}}$, e) $\dfrac{e^{4x}}{e^{2x}+1}$, f) $\dfrac{e^{3x}}{(1+e^{2x})(e^x-1)^2}$,

g) $\dfrac{2\ln x-1}{x\ln x(\ln x-1)^2}$, h) $\dfrac{\ln x}{x(\ln x-1)^2}$, i) $\dfrac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}$,

RESOLUÇAO:

a) Fazendo a substituição $\sqrt{x}=t \Leftrightarrow x=t^2$, com $x>0$, $x\neq 16$, e $t>0$, $t\neq 4$, temos

$$P\left(\frac{1+\sqrt{x}}{x(4-\sqrt{x})}\right)=P\left(\frac{1+t}{t^2(4-t)}\,2t\right)=2P\left(\frac{1+t}{t(4-t)}\right).$$

Usando a decomposição em fracções simples:

$$\frac{2+2t}{t(4-t)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{4-t}$$

temos $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{5}{2}$, logo

$$2P\left(\frac{1+t}{t(4-t)}\right)=\frac{1}{2}P\left(\frac{1}{t}+\frac{5}{4-t}\right)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t}{(4-t)^5}\right|$$

e assim,

$$P\left(\frac{1+\sqrt{x}}{x(4-\sqrt{x})}\right)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x}}{(4-\sqrt{x})^5}\right|.$$

b) Fazendo a substituição $\sqrt[3]{x}=t \Leftrightarrow x=t^3$, temos (verifique)

$$P\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt[3]{x^4})}\right)=P\left(\frac{3t^2}{1+t^4}\right)=\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x^2}.$$

c) Fazendo a substituição $\sqrt{x-1}=t \Leftrightarrow x=t^2+1$, com $x>1$ e $t>0$ temos (verifique)

$$P\left(\frac{\sqrt{x-1}}{x}\right)=P\left(\frac{2t^2}{t^2+1}\right)=2\sqrt{x-1}-2\operatorname{arctg}\sqrt{x-1}$$

d) Fazendo a substituição $e^{2x}=t \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln t$, com $x\in\mathbb{R}$ e $t>0$, temos

$$P\left(\frac{1}{1+e^{2x}}\right)=P\left(\frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{2t}\right).$$

jpinto@math.tecnico.ulisboa.pt

Usando a decomposição em fracções simples:

$$\frac{1}{(1+t)2t} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{t}$$

temos $A = -\frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$, logo

$$P\left(\frac{1}{1+t} \cdot \frac{1}{2t}\right) = P\left(-\frac{1}{2(1+t)} + \frac{1}{2t}\right) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t}{1+t}\right|$$

e assim, com $t = e^{2x} > 0$,

$$P\left(\frac{1}{1+e^{2x}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\right).$$

(Ou $P\left(\frac{1}{1+e^{2x}}\right) = P\left(\frac{1+e^{2x}-e^{2x}}{1+e^{2x}}\right) = P\left(1 - \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\right) = x - \ln(1+e^{2x})$.)

e) Fazendo a substituição $e^{2x} = t \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\ln t$, com $x \in \mathbb{R}$ e $t > 0$, temos (verifique)

$$P\left(\frac{e^{4x}}{e^{2x}+1}\right) = \frac{1}{2}P\left(\frac{t}{t+1}\right) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right).$$

f) Fazendo a substituição $e^{x} = t \Leftrightarrow x = \ln t$, com $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $t > 0$, $t \neq 1$, temos

$$P\left(\frac{e^{3x}}{(1+e^{2x})(e^x-1)^2}\right) = P\left(\frac{t^3}{(1+t^2)(t-1)^2}\,\frac{1}{t}\right) = P\left(\frac{t^2}{(1+t^2)(t-1)^2}\right).$$

Usando a decomposição em fracções simples:

$$\frac{t^2}{(1+t^2)(t-1)^2} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{C}{t-1} + \frac{D}{(t-1)^2}$$

temos $A = -\frac{1}{2}$, $B = 0$, $C = D = \frac{1}{2}$, logo

$$\begin{aligned} P\left(\frac{t^2}{(1+t^2)(t-1)^2}\right) &= \frac{1}{2}P\left(-\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2}\right) \\ &= -\frac{1}{4}\ln(1+t^2) + \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\frac{1}{t-1} \end{aligned}$$

e assim

$$P\left(\frac{e^{3x}}{(1+e^{2x})(e^x-1)^2}\right) = -\frac{1}{4}\ln(1+e^{2x}) + \frac{1}{2}\ln|e^x-1| - \frac{1}{2}\frac{1}{e^x-1}.$$

g) Fazendo a substituição $\ln x = t \Leftrightarrow x = e^t$, com $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1, e\}$ e $t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, temos

$$P\left(\frac{2\ln x - 1}{x\ln x(\ln x - 1)^2}\right) = P\left(\frac{2t-1}{e^t t(t-1)^2}e^t\right) = P\left(\frac{2t-1}{t(t-1)^2}\right).$$

Usando a decomposição em fracções simples:

$$\frac{2t-1}{t(t-1)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{(t-1)^2}$$

temos $A = -1$, $B = C = 1$, logo

$$P\left(\frac{2t-1}{t(t-1)^2}\right) = P\left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2}\right) = \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| - \frac{1}{t-1}$$

e assim

$$P\left(\frac{2\ln x - 1}{x\ln x(\ln x - 1)^2}\right) = \ln\left|\frac{\ln x - 1}{\ln x}\right| - \frac{1}{\ln x - 1}.$$

h) Fazendo a substituição $\ln x = t \Leftrightarrow x = e^t$, com $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{e\}$ e $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, temos

$$P\left(\frac{\ln x}{x(\ln x - 1)^2},\right) = P\left(\frac{t}{(t-1)^2},\right) = \ln|\ln x - 1| - \frac{1}{\ln x - 1}.$$

i) Fazendo a substituição $\operatorname{tg} x = t \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} t$, com $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $x \neq -\frac{\pi}{4}$ e $t \neq -1$, temos (verifique)

$$P\left(\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}\right) = P\left(\frac{1-t}{(1+t)(1+t^2)}\right) = \ln|\cos x| + \ln|\operatorname{tg} x + 1|.$$

NOTA: Esta substituição é invertível para $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, mas como a função $\operatorname{tg} x$ é periódica de período π, o resultado é válido no domínio de $\operatorname{tg} x$.

4. Determine, ou justifique que não existem, funções que verifiquem as seguintes condições:

a) $f'(x) = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b) $f'(x) = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{x(4 - \sqrt{x})}$, $x > 16$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

c) $f'(x) = \dfrac{1}{1 + e^{2x}}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

RESOLUÇÃO

a) Temos $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + c$, com $c \in \mathbb{R}$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi^2}{8} + c$, logo $c = -\frac{\pi^2}{8}$.

b) Temos $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x}}{(4-\sqrt{x})^5}\right| + c$, para $x > 16$ (Ex. 3.a)); $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, logo não existe f nas condições do enunciado.

c) Temos $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\right) + 1$ (ver 3.d))

5. Usando a substituição indicada num domínio apropriado, determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

a) $\dfrac{1}{x\sqrt[4]{1+x}}$, $1 + x = t^4$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}$, $t^2 = 1 + e^x$

c) $\dfrac{1}{x(4-\ln^2(x))}$, $t = \ln x$

d) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2(x) + 3(\cos x - 1)}$, $t = \cos x$

e) $\dfrac{1}{\cos x(1 - \operatorname{sen} x)}$, $t = \operatorname{sen}(x)$

f) $\sqrt{1-x^2}$, $x = \operatorname{sen} t$.

RESOLUÇÃO

a) Fazendo a substituição $\sqrt[4]{1+x} = t \Leftrightarrow x = t^4 - 1$, com $x > -1$ e $t > 0$, temos

$$P\left(\frac{1}{x\sqrt[4]{1+x}}\right) = P\left(\frac{1}{(t^4-1)t}\,4t^3\right) = P\left(\frac{4t^2}{t^4-1}\right).$$

Usando a decomposição em fracções simples:

$$\frac{4t^2}{t^4-1} = \frac{4t^2}{(t-1)(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{t^2+1},$$

temos $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$, $D = 2$ (verifique). Logo,

$$P\left(\frac{4t^2}{t^4-1}\right) = P\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} + \frac{2}{t^2+1}\right) = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + 2\operatorname{arctg} t$$

e assim,

$$P\left(\frac{1}{x\sqrt[4]{1+x}}\right) = \ln\left|\frac{\sqrt[4]{1+x}-1}{\sqrt[4]{1+x}+1}\right| + 2\operatorname{arctg}\sqrt[4]{1+x}.$$

b) Fazendo a substituição $t = \sqrt{1+e^x} \Leftrightarrow x = \ln(t^2-1)$, para $x \in \mathbb{R}$, $t > 1$, temos

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\right) = P\left(\frac{1}{t}\,\frac{2t}{t^2-1}\right) = P\left(\frac{2}{(t-1)(t+1)}\right).$$

Usando a decomposição em fracções simples:

$$\frac{2}{(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1}$$

temos $A = 1$ e $B = -1$. Logo

$$P\left(\frac{2}{(t-1)(t+1)}\right) = \ln|t-1| - \ln|t+1| = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$$

e assim

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\right) = \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|.$$

c) Fazendo a substituição $\ln x = t \Leftrightarrow x = e^t$, para $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{e^{-2}, e^2\}$, $t \neq \pm 2$, temos

$$P\left(\frac{1}{x(4-\ln^2(x))}\right) = P\left(\frac{1}{e^t(4-t^2)}\, e^t\right) = P\left(\frac{1}{(2-t)(2+t)}\right).$$

Usando a decomposição em fracções simples:

$$\frac{1}{(2-t)(2+t)} = \frac{A}{2-t} + \frac{B}{2+t} = \frac{A(2+t)+B(2-t)}{(2-t)(2+t)}$$

temos $A = B = 1/4$. Logo

$$P\left(\frac{1}{(2-t)(2+t)}\right) = -\frac{1}{4}\ln|2-t| + \frac{1}{4}\ln|2+t| = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right|$$

e assim

$$P\left(\frac{1}{x(4-\ln^2(x))}\right) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\ln x}{2-\ln x}\right|.$$

d) Temos

$$P\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x + 3(\cos x - 1)}\right) = P\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos^2 x + 3(\cos x - 1)}\right) = P\left(\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x - 3\cos x + 2}\right)$$

Fazendo a substituição $t = \cos x \Leftrightarrow x = \arccos t$, com $x \in]0, \pi[$, temos

$$P\left(\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos^2 x - 3\cos x + 2}\right) = P\left(\frac{1}{t^2-3t+2}\right) = P\left(\frac{1}{(t-1)(t-2)}\right) = P\left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1}\right)$$

e assim

$$P\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2(x) + 3(\cos x - 1)}\right) = \ln\left|\frac{\cos x - 2}{\cos x - 1}\right|.$$

Fazendo a substituição $t = \operatorname{sen} x \Leftrightarrow x = \operatorname{arcsen} t$, com $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, temos

$$P\left(\frac{1}{\cos x(1-\operatorname{sen} x)}\right) = P\left(\frac{\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)(1-\operatorname{sen} x)^2}\right) = P\left(\frac{1}{(1+t)(1-t)^2}\right).$$

Usando a decomposição em fracções simples:

$$\frac{1}{(1+t)(1-t)^2} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{(1-t)^2}$$

temos $A = B = 1/4$, $C = 1/2$ (verifique). Logo

$$P\left(\frac{1}{(1+t)(1-t)^2}\right) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + \frac{1}{2(1-t)}$$

e assim

$$P\left(\frac{1}{\cos x(1-\operatorname{sen} x)}\right) = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}\right| + \frac{1}{2(1-\operatorname{sen} x)}.$$