2.2 Limite de funções em $\mathbb{R}$ e $\overline{\mathbb{R}}$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Mostre, recorrendo à definição de limite em $\mathbb{R}$, que para a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 + 1$ se tem $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$. [1].

   RESOLUÇÃO

Por definição, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ se dado $\delta > 0$ qualquer, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$|x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta.$$

Para $f(x) = x^2 + 1$: dados $a \in \mathbb{R}$ e $\delta > 0$, temos

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 + 1 - a^2 - 1| = |x^2 - a^2| = |x + a||x - a| \leq (|x| + |a|)|x - a|.$$

Se $|x - a| < \varepsilon$, (constatando que então, $|x| = |(x - a) + a| \leq |x - a| + |a| < \varepsilon + |a|$), resulta, nesse caso,

$$|f(x) - f(a)| < (\varepsilon + |a| + |a|)|x - a| < (2|a| + \varepsilon)\varepsilon \leq (2|a| + 1)\varepsilon,$$

escolhendo sempre $\varepsilon \leq 1$. Assim, para que $|f(x) - f(a)| < \delta$, por transitividade, é suficiente escolher $1 \geq \varepsilon > 0$ tal que

$$(2|a| + 1)\varepsilon < \delta \Leftrightarrow \varepsilon < \frac{\delta}{2|a| + 1}.$$

Neste caso, temos então, $|x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta$.

2. Use a definição de limite de função em $\overline{\mathbb{R}}$ para mostrar que

   a) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, b) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

   RESOLUÇÃO

a) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$: temos de mostrar que dado $\delta > 0$ arbitrário (ou um $R > 0$, suficientemente grande, $R = 1/\delta$), existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$|x - 0| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta}.$$

Então, dado $\delta > 0$, temos

$$\frac{1}{x^2} > \frac{1}{\delta} \Leftrightarrow x^2 < \delta \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\delta}.$$

Tomando, por exemplo, $\varepsilon = \sqrt{\delta}$, mostramos que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

[1] Em particular, f é contínua em qualquer $a \in \mathbb{R}$

jpinto@math.tecnico.ulisboa.pt

b) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$: temos de mostrar que dado $\delta > 0$ arbitrário, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$x > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \sqrt{x} > \frac{1}{\delta}.$$

Dado $\delta > 0$, temos

$$\sqrt{x} > \frac{1}{\delta} \Leftrightarrow x > \frac{1}{\delta^2}.$$

Tomando, por exemplo, $\varepsilon = \delta^2$, mostramos que $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

3. Determine, se existir, cada um dos seguintes limites, justificando o cálculo ou a não existência de limite.

a) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1}$,

b) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^{x^2} - 1}{x}$,

d) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x}{\ln(2x+1)}$,

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$,

f) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$,

g) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}$,

h) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{e^{(x-1)^5} - 1}{(x-1)^7}$,

i) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - 1}{\operatorname{sen} x}$,

j) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{x \arccos x}$,

k) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x}{\operatorname{arcsen} x}$,

l) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\ln(\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x}$,

RESOLUÇÃO

a) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to1} \frac{x^2(x-1) + x - 1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to1} \frac{x^2+1}{x+1} = 1;$

b) $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to1} \frac{x}{(x-2)} = -1;$

c) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^{x^2} - 1}{x} = \lim_{x\to0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} x = 1 \cdot 0 = 0$, uma vez que $\displaystyle\lim_{y\to0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$ (com $y = x^2$).

d) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x}{\ln(2x+1)} = \lim_{x\to0} \frac{2x}{\ln(2x+1)} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, uma vez que $\displaystyle\lim_{y\to0} \frac{y}{\ln(y+1)} = 1$.

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{y\to0^+} \frac{e^y - 1}{y} = 1$ (tomando $y = 1/x \to 0^+$, se $x \to +\infty$).

f) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to0} \frac{(1+x) - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x\to0} \frac{2}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = 1.$

g) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \sqrt{x} = 1 \cdot 0 = 0.$

h) $\lim_{x\to1}\frac{e^{(x-1)^5}-1}{(x-1)^7}=\lim_{x\to1}\frac{e^{(x-1)^5}-1}{(x-1)^5}\frac{1}{(x-1)^2}=1\cdot\frac{1}{0^+}=+\infty$ (tomando $y=(x-1)^5\to0$, se $x\to1$).

i) $\lim_{x\to0}\frac{e^{\operatorname{sen}x}-1}{\operatorname{sen}x}=\lim_{y\to0}\frac{e^y-1}{y}=1$, tomando $y=\operatorname{sen}x\to0$, se $x\to0$.

j) $\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}5x}{x\operatorname{arcos}x}=\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}5x}{5x}\frac{5}{\cos5x\operatorname{arcos}x}=1\cdot\frac{5}{\frac{\pi}{2}}=\frac{10}{\pi}$, uma vez que $\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1$.

k) $\lim_{x\to0}\frac{x}{\operatorname{arcsen}x}=\lim_{y\to0}\frac{\operatorname{sen}y}{y}=1$, fazendo a mudança de variável $y=\operatorname{arcsen}x\to0$, se $x\to0$.

l) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{\operatorname{sen}^2x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{1-\cos^2x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{1-\cos x}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}\lim_{u\to1}\frac{\ln u}{1-u}=-\frac{1}{2}$, fazendo a mudança de variável $u=\cos x\to1$, se $x\to0$ e usando $\lim_{u\to1}\frac{\ln u}{u-1}=1$.

4. (a) Mostre que se $\lim_{x\to a}f(x)=+\infty$ e $\lim_{x\to a}g(x)=c\in\mathbb{R}$, então

$$\lim_{x\to a}\left(1+\frac{g(x)}{f(x)}\right)^{f(x)}=e^c.$$

(b) Utilize o resultado anterior para calcular os limites das sucessões seguintes, com $c\in\mathbb{R}$:

$$\lim\left(1+\frac{c}{n}\right)^n,\quad \lim\left(1+\frac{1}{n!}\right)^{n!},\quad n\in\mathbb{N}.$$

RESOLUÇÃO

(a) O limite dado é uma indeterminação da forma 1^∞. Temos

$$\lim_{x\to a}\left(1+\frac{g(x)}{f(x)}\right)^{f(x)}=\lim_{x\to a}e^{f(x)\ln\left(1+\frac{g(x)}{f(x)}\right)}=e^c,$$

já que, fazendo $y=\frac{g(x)}{f(x)}\to0$, quando $x\to a$,

$$\lim_{x\to a}f(x)\ln\left(1+\frac{g(x)}{f(x)}\right)=\lim_{x\to a}g(x)\frac{\ln\left(1+\frac{g(x)}{f(x)}\right)}{\frac{g(x)}{f(x)}}=c\lim_{y\to0}\frac{\ln(1+y)}{y}=c.$$

(b) Fazendo $f(x)=x$ e $g(x)=c$ e $a=+\infty$, temos

$$\lim\left(1+\frac{c}{n}\right)^n=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{c}{x}\right)^x=e^c.$$

Quanto ao segundo limite, note-se que $\left(1+\frac{1}{n!}\right)^{n!}$ é subsucessão de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, logo o seu limite é e.

5. Suponha que para todo o $n \in \mathbb{N}$, a função f verifica a condição

$$f\left(-\frac{1}{n}\right) = 1 - f\left(\frac{1}{n}\right).$$

Se existirem os limites laterais $f(0^-)$ e $f(0^+)$ quanto valerá a sua soma? Se existir $\lim_{x\to 0} f(x)$ qual será o seu valor? Justifique abreviadamente as respostas.

RESOLUÇÃO

Se existirem os limites laterais $f(0^-)$ e $f(0^+)$, temos

$$\lim f\left(-\frac{1}{n}\right) = f(0^-), \quad \lim f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0^+).$$

Então,

$$f\left(-\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \Rightarrow f(0^-) + f(0^+) = 1.$$

Se existir $\lim_{x\to 0} f(x)$, temos $f(0^-) = f(0^+) = \lim_{x\to 0} f(x)$. Como $f(0^-) + f(0^+) = 1$, temos $2\lim_{x\to 0} f(x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$.

6. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{x + |x|}{2} d(x)$, onde $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ designa a função de Dirichlet ($d(x) = 1$, $x \in \mathbb{Q}$ e $d(x) = 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

   a) Indique o contradomínio de f. A função é majorada? E minorada?
   b) Estude $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.
   c) Para cada $a \in \mathbb{R}$, determine, ou justifique que não existe, $\lim_{x\to a} f(x)$.

RESOLUÇÃO

Temos

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2} d(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 0, \\ 0, & \text{se } x > 0 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ x, & \text{se } x > 0 \wedge x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

a) Para $x \leq 0$, temos $f(x) = 0$, logo $f(]-\infty, 0]) = \{0\}$. Para $x > 0$ temos $f(x) = 0$, se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $f(x) = x$ se $x \in \mathbb{Q}$. Logo $f(]0, +\infty[= \{0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\} = \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$. Assim, $CD_f = f(\mathbb{R}) = \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$. A função não é majorada, uma vez que $\mathbb{Q}^+$ não é majorado, é minorada por 0.

b) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} 0 = 0$;
$\lim_{x\to +\infty} f(x)$ não existe: se $x_n = \sqrt{2}n$ então $f(x_n) = 0$, se $z_n = n$ então $f(z_n) = n \to +\infty$.

c) Se $a < 0$: $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} 0 = 0$ e da mesma forma $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$. Quanto a $\lim_{x\to 0^+} f(x)$: para $x > 0$, temos $0 \leq f(x) \leq x$, logo $f(x) \to 0$, $x \to 0^+$ (ou $\lim_{x\to 0^+, x\in\mathbb{Q}} f(x) = \lim_{x\to 0^+, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} f(x) = 0$). Logo se $a = 0$, $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

jpinto@math.tecnico.ulisboa.pt

Para $a > 0$: não existe limite. Para verificar, toma-se por exemplo $x_n = a + \frac{1}{n} \to a$. Se $a \in \mathbb{Q}$, então $x_n \in \mathbb{Q}$ e $f(x_n) = x_n \to a$. Por outro lado, tomando $z_n = a + \frac{\sqrt{2}}{n} \to a$, então $z_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ e $f(z_n) = 0 \to 0$. Logo $\lim f(z_n) \neq \lim f(x_n)$, logo não existe $\lim_{x \to a} f(x)$. Se $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $a > 0$, procede-se de forma semelhante.

7. Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função periódica, de período $T > 0$, então não existem $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$. (Sug. considere sucessões $x_n = x + n\pi \to +\infty$ e $z_n = z + n\pi \to +\infty$, $f(x) \neq f(z)$.)

   RESOLUÇÃO

Fazendo $x_n = x + n\pi \to +\infty$ e $z_n = z + n\pi \to +\infty$, com $x, z \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) \neq f(z)$ (como $T > 0$, f não é constante), se existisse $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, teríamos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} f(z_n).$$

Mas como $f(x_n) = f(x)$, $f(z_n) = f(z)$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x) \neq \lim_{n \to \infty} f(z_n) = f(z).$$

Logo o limite não existe.

Para $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ é análogo (ou $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(-x)$ e $f(-x)$ periódica).