1 NÚMEROS REAIS E SUCESSÕES

1.1 Método de Indução Matemática

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

   a) $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.[1]

   b) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, para todo o natural $n \in \mathbb{N}$.

   c) Para $a \in \mathbb{R}$, $(a - 1)(1 + a + \cdots + a^n) = a^{n+1} - 1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$.

   d) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   RESOLUÇÃO:

   a) $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$:

   Para $n = 1$, temos $2 \cdot 1 - 1 = 1$, que é uma proposição verdadeira.
   Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, temos $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.
   Tese (a provar): $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) = (n + 1)^2$.
   Usando a hipótese de indução, temos:

   $$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) = n^2 + (2n + 2 - 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2$$

   como queríamos mostrar.

   (Alternativamente, podemos escrever $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = \sum_{k=1}^{n}(2k - 1)$ e usar o facto $\sum_{k=1}^{n+1}(2k - 1) = \sum_{k=1}^{n}(2k - 1) + 2(n + 1) - 1$.)

   b) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

[1] Esta expressão pode ser escrita na forma de somatório como $\sum_{k=1}^{n}(2k - 1) = n^2$. Ver exercicios seguintes.

Para $n = 1$, temos $\frac{1}{1.2} = \frac{1}{1+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, que é uma proposição verdadeira.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, temos $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.
Tese (a provar): $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$.
Usando a hipótese de indução, temos:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.
(Alternativamente: usando somatórios).

c) Dado $a \in \mathbb{R}$, $(a-1)(1+a+\cdots+a^n) = a^{n+1} - 1$, para qualquer $n \in \mathbb{N}_0$:

Para $n = 0$, a condição acima fica $a - 1 = a - 1$ que é uma proposição verdadeira.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, $(a-1)(1+a+\cdots+a^n) = a^{n+1} - 1$.
Tese: $(a-1)(1+a+\cdots+a^n+a^{n+1}) = a^{n+2} - 1$.
Simplificando o lado esquerdo da igualdade acima, temos que

$$(a-1)(1+a+\cdots+a^{n+1}) = (a-1)(1+a+\cdots+a^n) + (a-1)a^{n+1}.$$

Usando a hipótese de indução, temos agora

$$\begin{aligned}(a-1)(1+a+\cdots+a^{n+1}) &= a^{n+1} - 1 + (a-1)a^{n+1}. \\ &= a^{n+1} - 1 + a^{n+2} - a^{n+1} \\ &= a^{n+2} - 1,\end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

d) $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

Para $n = 1$, a condição fica $\frac{1}{2!} = 1 - \frac{1}{1+1!} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, que é uma proposição verdadeira.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$.
Tese: $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} + \frac{n+1}{(n+2)!} = 1 - \frac{1}{(n+2)!}$.

Usando a hipótese de indução,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!} &= \left(1-\frac{1}{(n+1)!}\right)+\left(\frac{n+1}{(n+2)!}\right)\\ &= 1-\frac{n+2-n-1}{(n+2)!}\\ &= 1-\frac{1}{(n+2)!}\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.

2. Demonstre pelo princípio de indução matemática que:

   a) $(n+2)! \geq 2^{2n}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
   b) $2n-3 < 2^{n-2}$, para todo o natural $n \geq 5$.
   c) $(n!)^2 > 2^n n^2$, para todo o natural $n \geq 4$.
   d) $7^n - 1$ é divisível por 6 para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

   RESOLUÇÃO:

   a) $(n+2)! \geq 2^{2n}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

Para $n = 1$, temos que $3! \geq 4$ que é uma proposição verdadeira.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$ com $n \in \mathbb{N}$, temos $(n+2)! \geq 2^{2n}$.
Tese: $(n+3)! \geq 2^{2n+2}$.
Temos que $(n+3)! \geq 2^{2n+2} \Leftrightarrow (n+3)(n+2)! \geq 4 \cdot 2^{2n}$. Como, por hipótese de indução, $(n+2)! \geq 2^{2n}$ e, para $n \geq 1$, $n+3 \geq 4 > 0$, temos então que

$$(n+3)(n+2)! \geq 4 \cdot 2^{2n}$$

como queríamos mostrar.

   b) $2n-3 < 2^{n-2}$, para todo o natural $n \geq 5$:

Para $n = 5$, temos que $10 - 3 < 2^3 \Leftrightarrow 7 < 8$, que é uma proposição verdadeira.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq 5$, temos $2n - 3 < 2^{n-2}$.
Tese: $2(n+1) - 3 < 2^{(n+1)-2}$.
Desenvolvendo o lado esquerdo da desigualdade acima e usando a hipótese, temos

$$2(n+1) - 3 = 2n + 2 - 3 = (2n-3) + 2 < 2^{n-2} + 2,$$

Como, para $n \geq 5$, temos $2 < 2^{n-2}$, conclui-se que $2^{n-2} + 2 < 2^{n-2} + 2^{n-2} = 2 \cdot 2^{n-2} = 2^{n-1}$. Logo

$$2(n+1) - 3 < 2^{n-1}.$$

c) $(n!)^2 > 2^n n^2$, para todo o natural $n \geq 4$:

Para $n = 4$, temos $(4!)^2 > 2^4 \cdot 4^2 \Leftrightarrow 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 > 2^4 \cdot 4^2 \Leftrightarrow 3^2 > 2^2$, que uma proposição verdadeira.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, temos $(n!)^2 > 2^n n^2$.
A provar: $((n+1)!)^2 > 2^{n+1}(n+1)^2$.
Temos $((n+1)!)^2 > 2^{n+1}(n+1)^2 \Leftrightarrow (n+1)^2(n!)^2 > 2^{n+1}(n+1)^2 \Leftrightarrow (n!)^2 > 2^n \cdot 2$. Por hipotese, $(n!)^2 > 2^n n^2$ e como $n^2 > 2$, se $n \geq 4$, o resultado segue (da propriedade transitiva).

d) $7^n - 1$ é divisível por 6 para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

Para $n = 1$, temos $7^1 - 1 = 6$, que é divisível por 6.
Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, $7^n - 1$ é divisível por 6. Isto significa que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $6k = 7^n - 1$.
Tese: $7^{n+1} - 1$ é divisível por 6, isto é, existe um natural positivo j tal que $7^{n+1} - 1 = 6j$.
Então:

$$7^{n+1} - 1 = 7 \cdot 7^n - 1 = 7(7^n - 1 + 1) - 1 = 7(6k+1) - 1 = 6 \cdot 7k + 7 - 1 = 6(7k+1)$$

em que na terceira igualdade usámos a hipótese de indução. Demonstrámos então a tese com $j = 7k + 1$.

3. Prove por indução matemática que para qualquer $n \in \mathbb{N}$

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{5-2k}{3^k} = 1 + \frac{n-1}{3^n}$.

RESOLUÇAO

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

Para $n = 1$, temos $\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2+1} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, que é uma proposição verdadeira.

Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, temos $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$.

Tese (a provar): $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n+1}{2n+3}$.

Temos, usando a HI na segunda igualdade:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2(n+1)-1)(2(n+1)+1)}\\ &= \frac{n}{2n+1}+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)}\\ &= \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}\end{aligned}$$

já que $(n+1)(2n+1) = 2n^2+3n+1$.

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{5-2k}{3^k} = 1+\frac{n-1}{3^n}$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

Para $n=1$, temos $\sum_{k=1}^{1}\frac{5-2k}{3^k} = 1$, que é uma proposição verdadeira.

Hipótese de indução: para certo $n \in \mathbb{N}$, temos $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{5-2k}{3^k} = 1+\frac{n-1}{3^n}$.

Tese (a provar): $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{5-2k}{3^k} = 1+\frac{n}{3^{n+1}}$.

Temos, usando a HI na segunda igualdade:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{5-2k}{3^k} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{5-2k}{3^k}+\frac{5-2(n+1)}{3^{n+1}}\\ &= 1+\frac{n-1}{3^n}+\frac{3-2n}{3^{n+1}} = 1+\frac{3n-3+3-2n}{3^{n+1}}\\ &= 1+\frac{n}{3^{n+1}},\end{aligned}$$

como queríamos mostrar.