3 Cálculo Diferencial

3.1 Diferenciabilidade

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Para cada uma das seguintes funções determine o domínio de diferenciabilidade e calcule as respectivas derivadas:

   a) $x|x|$, b) $e^{-|x|}$, c) $\ln|x|$, d) $e^{x-|x|}$.

   RESOLUÇÃO

a) $f(x) = x|x|$ é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ por ser o produto de duas funções diferenciáveis em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Em $x = 0$, temos

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$
$$f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0.$$

Como $f'_d(0) = f'_e(0)$, a função é também diferenciável para $x = 0$, ou seja é diferenciável em $\mathbb{R}$, com derivada $f'(x) = 2x$, se $x > 0$, $f'(0) = 0$, $f'(x) = -2x$, se $x < 0$.

b) $f(x) = e^{-|x|}$ é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ por ser dada pela composição da função exponencial que é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $|x|$, que é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Em $x = 0$, tem-se $f'_e(0) = 1$ e $f'_d(0) = -1$ (justifique), logo f não é diferenciável em 0.

c) $f(x) = \ln|x|$ é diferenciável no seu domínio, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, por ser dada pela composição de ln, que é diferenciável no seu domínio $\mathbb{R}^+$ e $|x|$ que é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

d) $f(x) = e^{x-|x|}$ é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (como em b)). Em $x = 0$, $f'_d(0) = 0$, $f'_e(0) = 2$ (justifique), logo f não é diferenciável em 0.

2. Calcule as constantes a e b por forma a que seja diferenciável em 0 a função f definida em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} a + bx & \text{se } x \leq 0 \\ 1 + \frac{2}{x}\,\text{sen}^2(x) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Justifique a diferenciabilidade de f em $\mathbb{R}$, calcule a sua derivada, e determine a equação da recta tangente ao gráfico de f em cada ponto $a \leq 0$.

RESOLUÇÃO

Em primeiro lugar, para f ser diferenciável em 0, f tem que ser contínua em 0. Logo, como $f(0) = a$ e

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 + \frac{2}{x}\operatorname{sen}^2(x) = 1 + \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} 2x = 1 + 2\cdot 0 = 1,$$

resulta que f é contínua em 0 sse $a = 1$.

Quanto à diferenciabilidade,

$$f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{bx}{x} = b$$

e

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 + \frac{2}{x}\operatorname{sen}^2(x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\operatorname{sen}^2(x)}{x^2} = 2.$$

Logo f é diferenciável em 0 sse $b = 2$ (e $a = 1$).

Neste caso, $f'(0) = 2$ e a tangente ao gráfico em $(0, f(0))$ é dada por $y = f(0) + f'(0)(x-0) = 1 + 2x$.

Se $a < 0$, então (numa vizinhança de a) f é dada pela função polinomial (linear) $1 + 2x$, logo f é diferenciável em $]-\infty, 0[$ e $f'(a) = 2$ para $a < 0$, vindo a tangente ao gráfico em $(a, f(a))$ dada por $y = f(a) + f'(a)(x - a) = 1 + 2a + 2(x - a) = 1 + 2x$ (ou seja, é a própria recta).

Se $a > 0$, então (numa vizinhança de a) f é dada pela função $1 + \frac{2}{x}\operatorname{sen}^2(x)$ que é diferenciável em a, já que é dada por soma e produtos de funções diferenciáveis. Logo, f é diferenciável em $]0, +\infty[$ e para $a > 0$, $f'(a) = -\frac{2}{a^2}\operatorname{sen}^2 a + \frac{2}{a} 2 \operatorname{sen} a \cos a = \frac{2\operatorname{sen} a}{a}\left(-\frac{\operatorname{sen} a}{a} + 2\cos a\right)$.

3. Determine as derivadas laterais no ponto 0 da função f contínua em $\mathbb{R}$ e cujos valores para $x \neq 0$ são dados por

$$f(x) = x\,\frac{1 + e^{\frac{1}{x}}}{2 + e^{\frac{1}{x}}}, \quad x \neq 0.$$

RESOLUÇÃO

Para calcularmos as derivadas laterais, é necessário determinar primeiro $f(0)$. Como f é contínua em 0, $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$. Temos

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0,$$

logo

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x\,\frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+e^{\frac{1}{x}}} = 0\cdot\frac{1}{2} = 0,$$

e portanto $f(0) = 0$.

(Também podíamos calcular:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\,\frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} x\,\frac{e^{-\frac{1}{x}}+1}{2e^{-\frac{1}{x}}+1} = 0\cdot\frac{1}{1} = 0.)$$

Agora,

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}+1}{2e^{-\frac{1}{x}}+1} = 1,$$

$$f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2}.$$

(Nota: f é contínua mas não diferenciável em 0.)

4. Sejam f e g duas funções em $\mathbb{R}$ tais que f é diferenciável em $\mathbb{R}$, verifica $f(0) = f(\pi) = 0$, e g é dada por $g(x) = f(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} f(x)$. Obtenha o seguinte resultado:

$$g'(0) + g'(\pi) = f'(0) + f'(\pi)$$

RESOLUÇÃO

Usando o teorema da derivação da função composta, uma vez que f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e sen também:

$$g'(x) = f'(\operatorname{sen} x)\cos x + \cos(f(x))f'(x).$$

Logo, dado que $f(0) = f(\pi) = 0$, temos $g'(0) = f'(\operatorname{sen} 0)\cos 0 + \cos(f(0))f'(0) = f'(0) + f'(0) = 2f'(0)$ e $g'(\pi) = f'(\operatorname{sen}\pi)\cos\pi + \cos(f(\pi))f'(\pi) = -f'(0) + f'(\pi)$. Então,

$$g'(0) + g'(\pi) = 2f'(0) - f'(0) + f'(\pi) = f'(0) + f'(\pi)\,.$$

5. Sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável, considere a função $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = e^{g(\ln x)}$. Supondo conhecidos os valores de g, g' e g'' em pontos convenientes, determine $\varphi'(1)$ e $\varphi''(e)$.

RESOLUÇÃO

Do teorema de derivação da função composta, para $x \in]0,+\infty[$,

$$\varphi'(x) = e^{g(\ln x)}\,(g(\ln x))' = e^{g(\ln x)}g'(\ln x)\frac{1}{x}.$$

Logo,

$$\varphi'(1) = e^{g(0)} g'(0).$$

Derivando φ', temos

$$\varphi''(x) = e^{g(\ln x)} \frac{1}{x^2} \left((g'(\ln x))^2 - g'(\ln x) + g''(\ln x) \right).$$

Logo,

$$\varphi''(e) = e^{g(1)-2} \left((g'(1))^2 - g'(1) + g''(1) \right).$$

6. Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^4 e^{-x}$ para todo o x, e sendo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável, calcule $(g \circ f)'(x)$ em termos da função g'.

RESOLUÇÃO

Usando o teorema da derivação da função composta, uma vez que f, g são diferenciáveis em $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(x) &= g'(f(x)) f'(x) \\ &= g'(x^4 e^{-x})(4x^3 e^{-x} - x^4 e^{-x}) \\ &= g'(x^4 e^{-x}) x^3 e^{-x} (4 - x). \end{aligned}$$

7. Considere uma função $f : \mathbb{R} \to]-1, 1[$ diferenciável e bijectiva, tal que $f(2) = 0$ e $f'(2) = 2$. Seja g a função definida por

$$g(x) = \arccos\left(f(x)\right).$$

a) Justifique que g é injectiva e, sendo g^{-1} a função inversa de g, determine $g'(2)$ e $(g^{-1})'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

b) Determine o domínio de g^{-1} e justifique que g^{-1} não é limitada.

RESOLUÇÃO

a) Uma vez que arcos é diferenciável em $]-1, 1[$ e f é diferenciável em $\mathbb{R}$ com contra-domínio $]-1, 1[$, a função composta será também diferenciável em $\mathbb{R}$. Por outro lado, f é bijectiva, logo injectiva, e arcos é também injectiva. Conclui-se que a composta será uma função injectiva.

Temos

$$g'(x) = -\frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f(x)^2}}.$$

Logo $g'(2) = -\frac{f'(2)}{\sqrt{1-f(2)^2}} = -2$.

Do Teorema de derivação da função inversa, temos agora que

$$(g^{-1})'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}.$$

Como $g(2) = \arcos(f(2)) = \arcos(0) = \frac{\pi}{2}$, temos $g^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$, ou seja $(g^{-1})'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{g'(2)} = -\frac{1}{2}$.

b) O domínio de g^{-1} é dado pelo contradomínio de g. Como f é sobrejectiva, $f(\mathbb{R}) =]-1,1[$ e

$$D_{g^{-1}} = g(\mathbb{R}) = \arcos(]-1,1[) =]0,\pi[.$$

Uma vez que g^{-1} é injectiva e contínua, será monótona, e portanto

$$g^{-1}(0^+) < g^{-1}(x) < g^{-1}(\pi^-)$$

e g^{-1} não terá máximo nem mínimo. Aliás, o contradomínio de g^{-1} é o domínio de g, ou seja, $\mathbb{R}$, e assim g^{-1} não é limitada.