2.3 Continuidade

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua no ponto 0. Em que ponto(s) será necessariamente contínua a função $g(x) = f(\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x)$? (Relembre que $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$).

   RESOLUÇÃO

   Sendo f e h duas funções e $a \in \mathbb{R}$, tais que h é contínua em a e f é contínua em $h(a)$, então necessariamente $g = f \circ h$ é contínua em a.

   Como tg e cotg são contínuas, respectivamente em $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, e $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, temos que $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x$ é uma função contínua em $D = \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$. Sendo f uma função contínua em 0, temos então que $g(x) = f(\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x)$ é contínua em cada $a \in D$ satisfazendo $\operatorname{tg} a - \operatorname{cotg} a = 0$. Como,

$$\operatorname{tg} a - \operatorname{cotg} a = \operatorname{tg} a - \frac{1}{\operatorname{tg} a} = \frac{\operatorname{tg}^2 a - 1}{\operatorname{tg} a},$$

   e, portanto, $\operatorname{tg} a - \operatorname{cotg} a = 0$ equivale a $\operatorname{tg} a = \pm 1$, ou seja $a = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, concluímos que a função dada é necessariamente contínua nestes pontos.

2. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus 0 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{2x^2} & \text{se } x < 0, \\ \dfrac{e^{\sqrt{x}} - 1}{a\sqrt{x}} & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

   em que $a \in \mathbb{R}$. Determine a por forma a que f seja prolongável por continuidade ao ponto 0. Sendo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse seu prolongamento, calcule $F(0)$.

   RESOLUÇÃO

   f é prolongável por continuidade ao ponto 0 se existir $\lim_{x\to 0} f(x)$, ou seja, se $f(0^+) = f(0^-)$. Temos

$$f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2x^2} = \frac{1}{2} \lim_{u\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = \frac{1}{2}$$

$$f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{a\sqrt{x}} = \frac{1}{a}.$$

   Logo, $a = 2$. Se F é prolongamento por continuidade de f, então $F(x) = f(x)$ para $x \neq 0$ e $F(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$.

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{k}{2+x^2}\right), & \text{se } x > 0, \\ -x(x+2), & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}^+$ é uma constante.

(a) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(b) Determine a constante $k \in \mathbb{R}$ tal que f é prolongável por continuidade ao ponto 0.

(c) Sendo $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esse seu prolongamento, determine justificando, o contradomínio de F.

RESOLUÇÃO

(a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{k}{2+x^2}\right) = \lim_{y\to 0^+} \ln y = -\infty$.
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x(x+2) = -\infty$.

(b) Temos $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \ln\left(\frac{k}{2}\right)$. Logo f é prolongável por continuidade a 0 sse $\ln\left(\frac{k}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow k = 2$.

(c) Em $]-\infty, 0]$, F é dada por uma parabola, com zeros em 0 e -2, de concavidade para baixo. Logo terá um máximo em $x = -1$ dado por $F(-1) = f(-1) = 1$. Como F é contínua, o contradomínio de F em $]-\infty, 0]$ é dado por $F(]-\infty, 0]) =]-\infty, 1]$ (usando a)).
Em $\mathbb{R}^+$, $F(x) = \ln\left(\frac{2}{2+x^2}\right)$ é decrescente e $F(x) < 0$, $x \in \mathbb{R}^+$, em particular 1 é o máximo (global) da função. De novo pela continuidade de F e de a), vem que $F(\mathbb{R}^+) =]-\infty, 0[$ e portanto $CD_f =]-\infty, 1] \cup]-\infty, 0[=]-\infty, 1]$.

4. Seja f a função real definida por,

$$f(x) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{x}}, & \text{se } x < 0, \\ \ln \frac{1}{1+x^2}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

a) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Justifique que f é contínua em todo o seu domínio.

c) Mostre que f é prolongável por continuidade ao ponto 0.

d) Sendo g a função que resulta de f por prolongamento por continuidade ao ponto 0, justifique que g tem máximo e mínimo em qualquer intervalo da forma $[-\varepsilon, \varepsilon]$, com $\varepsilon > 0$. Indique, justificando, o valor de $\max\{g(x) : x \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}$.

RESOLUÇÃO

a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -e^{\frac{1}{x}} = -1$.
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln \frac{1}{1+x^2} = -\infty$.

b) Em $a > 0$: f é contínua em a uma vez que, numa vizinhança de a, f é dada pela função $\ln \frac{1}{1+x^2}$, que é a composta de funções contínuas nos seus domínios e portanto contínua no seu domínio.

Em $a < 0$: f é contínua em a uma vez que, numa vizinhança de a, f é dada pela função $-e^{\frac{1}{x}}$, que é a composta de funções contínuas nos seus domínios e portanto contínua no seu domínio.

c) Temos

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln \frac{1}{1+x^2} = \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

Logo existe $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e f é prolongável por continuidade a 0.

d) Se g é o prolongamento por continuidade de f a 0, ou seja,

$$g(x) = \begin{cases} -e^{\frac{1}{x}}, & \text{se } x < 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ \ln \frac{1}{1+x^2}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

então g é contínua em $\mathbb{R}$ (é contínua em 0 por definição, e é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ porque f é). Logo, do Teorema de Weierstrass terá máximo (e mínimo) em qualquer intervalo limitado e fechado. Em particular, em qualquer intervalo $[-\varepsilon, \varepsilon]$, com $\varepsilon > 0$.

Como $-e^{\frac{1}{x}}$ é crescente (a exponencial é crescente, $\frac{1}{x}$ é decrescente, logo $e^{\frac{1}{x}}$ é decrescente), temos para $x \in [-\varepsilon, 0[$ que $g(x) \leq g(0^-) = 0$. Por outro lado, $\ln \frac{1}{1+x^2}$ é decrescente (o logaritmo é crescente e $\frac{1}{1+x^2}$ é decrescente), logo para $x \in]0, \varepsilon]$, $g(x) \leq g(0^+) = 0$. Conclui-se que $\max_{x\in[-\varepsilon,\varepsilon]} g(x) = g(0) = 0$.

5. a) Estude, quanto à continuidade em cada ponto do seu domínio, as funções definidas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ pelas fórmulas:

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \qquad \psi(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

b) Indique, justificando, se cada uma das funções φ e ψ é prolongável por continuidade ao ponto 0.

c) Mostre que ϕ e ψ são funções limitadas.

RESOLUÇÃO

a)
- φ é dada pela composição de funções contínuas nos seus domínios: a função exponencial, contínua em $\mathbb{R}$ e $-\frac{1}{x^2}$, contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Logo φ é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- ψ é dada pela diferença de duas funções: $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ e $\cos \frac{1}{x}$. As funções $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ e $\cos \frac{1}{x}$ são contínuas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, uma vez que são dadas pela composição de funções trigonométricas, contínuas em $\mathbb{R}$, e $\frac{1}{x}$, contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Logo, $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ e $\cos \frac{1}{x}$ são contínuas em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e ψ também o será.

b) φ e ψ são prolongáveis por continuidade a 0 sse existir (em $\mathbb{R}$) $\lim_{x\to 0}\varphi(x)$, e $\lim_{x\to 0}\psi(x)$, respectivamente. Para φ:

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x) = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{y\to -\infty} e^y = 0.$$

Logo φ é prolongável por continuidade a 0. Quanto a ψ:

- $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$, uma vez que para qualquer sucessão (x_n) com $x_n \to 0$, temos

$$\lim x_n \operatorname{sen}\frac{1}{x_n} = 0$$

por ser o produto de um infinitésimo por uma sucessão limitada. Por outro lado,

- $\lim_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ não existe, uma vez que para $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ e $y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}$ tem-se $\lim x_n = \lim y_n = 0$ e $\lim\cos\frac{1}{x_n} = \lim\cos(2n\pi) = 1$ e $\lim\cos\frac{1}{y_n} = \lim\cos((2n+1)\pi) = -1$. Logo $\lim_{x\to 0}\psi(x)$ não existe e ψ não é prolongável por continuidade ao ponto 0.

c)
- $\varphi(x) > 0$, uma vez que a função exponencial é sempre positiva. Por outro lado, $-\frac{1}{x^2} < 0$, logo como a função exponencial é crescente, temos $e^{-\frac{1}{x^2}} < e^0 = 1$. Conclui-se que $0 < \varphi(x) < 1$, e φ é limitada.
- Para ψ: $\cos\frac{1}{x}$ é limitada, com $-1 \le \cos\frac{1}{x} \le 1$. Quanto a $x\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, temos

$$\lim_{x\to+\infty} x\operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$$

e da mesma forma $\lim_{x\to-\infty} x\operatorname{sen}\frac{1}{x} = 1$ (aliás, a função é par). Logo, como existem em $\mathbb{R}$, os limites em $+\infty$ e $-\infty$, existe $a > 0$ tal que ψ é limitada em $[a, +\infty[$ e em $]-\infty, -a]$. Para $x \in [-a, a]$, temos

$$\left|x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \le |x| \Rightarrow \left|x\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \le a.$$

Logo ψ é limitada em $\mathbb{R}$. (Alternativamente, como ψ é prolongável por continuidade a 0, o Teorema de Weierstrass garante que o seu prolongamento contínuo terá máximo e mínimo em $[-a, a]$, logo será limitado e ψ, por consequência, também.)

6. Considere a função f definida (no conjunto dos pontos para os quais a expressão $\frac{\sqrt{x}}{x-1}$ designa um número real) pela fórmula $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$.

   a) Indique, sob a forma de uma reunião de intervalos disjuntos, o domínio de f.

   b) Calcule

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x).$$

   c) Justificando abreviadamente a resposta, indique o contradomínio de f.

d) Dê exemplos de sucessões (u_n) e (v_n), de termos no domínio de f tais que (u_n) e $(f(v_n))$ sejam convergentes e (v_n) e $(f(u_n))$ sejam divergentes.

RESOLUÇÃO

a) $D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge x - 1 \neq 0\} = [0, 1[\ \cup\ ]1, +\infty[$.

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}}{1-\frac{1}{x}} = 0.$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x}}{x-1} = -\infty.$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}}{x-1} = +\infty.$

c) $CD_f = f(D) = f([0,1[) \cup f(]1,+\infty[)$.

- $f([0,1[)$: se $x \in [0,1[$, então $x-1 < 0$ e assim $f(x) \leq 0$, ou seja, $f([0,1[) \subset]-\infty, 0]$. Por outro lado, como $f(0) = 0$ e $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$, e f é contínua no seu domínio (por ser o quociente de funções contínuas), do Teorema do Valor Intermédio temos que $]-\infty, 0] \subset f([0,1[)$. Logo, $f([0,1[) =]-\infty, 0]$.
- $f(]1,+\infty[)$: se $x \in]1,+\infty[$, então $f(x) > 0$, ou seja $f(]1,+\infty[) \subset]0,+\infty[$. Como f é contínua em $]1,+\infty[$, e $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, temos de novo pelo Teorema do Valor Intermédio, que $]0,+\infty[\subset f(]1,+\infty[)$. Logo, $f(]1,+\infty[) =]0,+\infty[$.

Conclui-se que $f(D) = \mathbb{R}$.

d)
- (u_n) convergente com $(f(u_n))$ divergente: qualquer sucessão no domínio de f com $u_n \to 1$, por exemplo, $u_n = 1 - \frac{1}{n} \to 1$ e $f(u_n) \to -\infty$.
- (v_n) divergente com $(f(v_n))$ convergente: qualquer sucessão no domínio de f com $v_n \to +\infty$, por exemplo, $u_n = n \to +\infty$ e $f(u_n) \to 0$.

7. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $g :]a,b[\to \mathbb{R}$ uma função contínua em $]a,b[$ tal que $\lim_{x\to a} g(x) = -\lim_{x\to b} g(x) = -\infty$. Mostre que existe uma única função contínua h, definida em $[a,b]$ e tal que
$$h(x) = \operatorname{arctg}[g(x)^2], \quad \text{para } x \in]a,b[.$$
Determine o seu contradomínio.

RESOLUÇÃO

Seja $g :]a,b[\to \mathbb{R}$ uma função contínua em $]a,b[$, $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{x\to a} g(x) = -\lim_{x\to b} g(x) = -\infty$. Queremos ver que existe uma única função contínua h definida em $[a,b]$ tal que
$$h(x) = \operatorname{arctg}[g(x)^2],\ x \in]a,b[.$$

Para $x \in]a,b[$: a função h já está definida, de forma única, pela fórmula acima, ou seja, definimos $h(x) = \operatorname{arctg}[g(x)^2]$, $a < x < b$.

Para $x = a$, como h é contínua em a, temos necessariamente

$$h(a) = \lim_{x \to a^+} \operatorname{arctg}[g(x)^2] = \lim_{y \to +\infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2},$$

e da mesma forma

$$h(b) = \lim_{x \to b^-} \operatorname{arctg}[g(x)^2] = \lim_{y \to +\infty} \operatorname{arctg} y = \frac{\pi}{2}.$$

Para determinar o contradomínio de h, determinamos primeiro o contradomínio de g: uma vez que g é contínua em $]a, b[$ e $\lim_{x \to a} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \to b} g(x) = +\infty$, tem-se do Teorema do Valor Intermédio que $g(]a, b[) = \mathbb{R}$. Conclui-se que o contradomínio de g^2 é $[0, +\infty[$ e portanto

$$h(]a, b[) = \operatorname{arctg}([0, +\infty[) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Como $h(a) = h(b) = \frac{\pi}{2}$, temos então que $CD_h = h([a, b]) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

8. Sendo $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, mostre que:

   a) Não existe nenhuma sucessão (x_n) de termos em $[0, 1]$ tal que $g(x_n) = n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

   b) Se existir uma sucessão (x_n) de termos em $[0, 1]$, convergente, tal que $g(x_n) = \frac{1}{n}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$, então existe $c \in [0, 1]$ tal que $g(c) = 0$.

   RESOLUÇÃO

   a) Se existisse uma sucessão (x_n) de termos em $[0, 1]$ tal que $g(x_n) = n$ para todo n, então $\lim g(x_n) = +\infty$. Em particular, g não seria limitada em $[0, 1]$, o que é impossível, do Teorema de Weierstrass, uma vez que g é contínua em $[0, 1]$.

      (Alternativamente, tomando uma subsucessão (x_{p_n}) convergente de (x_n) - que existe porque x_n é limitada, Teorema de Bolzano-Weierstrass - teríamos $\lim g(x_n) = +\infty$ e $\lim g(x_{p_n}) = g(\lim x_{p_n})$, porque g é contínua. Logo $g(\lim x_{p_n}) = +\infty$, o que é absurdo.)

   b) Se (x_n) de termos em $[0, 1]$ é tal que $g(x_n) = \frac{1}{n}$ para todo n, então $\lim g(x_n) = 0$. Seja $\lim x_n = c$. Como $(x_n) \subset [0, 1]$ e este intervalo é fechado $c \in [0, 1]$. Temos então $\lim g(x_n) = g(c)$ e portanto $g(c) = 0$.

9. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = xd(x)$, em que $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função de Dirichlet (i.e, $d(x) = 1$, se $x \in \mathbb{Q}$ e $d(x) = 0$, se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) é apenas contínua em $x = 0$.

   RESOLUÇÃO

Temos

$$f(x) = xd(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ x, & \text{se } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Por definição: para $a \neq 0$: existe $\varepsilon > 0$, por exemplo, $\varepsilon = |a|$, tal que em qualquer vizinhança de a existem pontos x tais que $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$: se $a \in \mathbb{Q}$, toma-se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, se $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, toma-se $x \in \mathbb{Q}$.

Para $a = 0$: $|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq |x|$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, por exemplo, $\delta = \varepsilon$ tal que $|x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$. Logo f é contínua em 0.

Usando limites relativos a subconjuntos: para qualquer $a \in \mathbb{R}$ temos

$$\lim_{x \to a, x \in \mathbb{Q}} xd(x) = \lim_{x \to a, x \in \mathbb{Q}} x = a,$$

$$\lim_{x \to a, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} xd(x) = \lim_{x \to a, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} 0 = 0.$$

Conclui-se que se $a \neq 0$, $\lim_{x \to a} xd(x)$ não existe, e portanto f não é contínua em $a \neq 0$. Para $a = 0$,

$$\lim_{x \to 0, x \in \mathbb{Q}} xd(x) = \lim_{x \to 0, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} xd(x) = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x \to 0} xd(x) = 0 = f(0)$$

(já que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$). Logo f é contínua em 0.

10. Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em a e $f(a) > 0$, então existe uma vizinhança de a, $V_\varepsilon(a)$, com $\varepsilon > 0$, tal que

$$\forall_{x \in \mathbb{R}} \quad x \in V_\varepsilon(a) \Longrightarrow f(x) > 0.$$

RESOLUÇÃO

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em a, tal que $f(a) > 0$. Então, para qualquer $\delta > 0$, existe uma vizinhança $V_\varepsilon(a)$, com $\varepsilon > 0$, tal que

$$x \in V_\varepsilon(a) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta.$$

Como $|f(x) - f(a)| < \delta \Leftrightarrow f(a) - \delta < f(x) < f(a) + \delta$, tomando $\delta > 0$ tal que $f(a) - \delta > 0 \Leftrightarrow 0 < \delta < f(a)$, o qual existe porque $f(a) > 0$, temos então que

$$x \in V_\varepsilon(a) \Longrightarrow f(x) > f(a) - \delta > 0.$$

jpinto@math.tecnico.ulisboa.pt