Mecânica Geométrica
3^aSérie de Problemas

Jorge Rocha, n^o45344

22 de Maio de 2001

1.

Seja $(Q, \langle,\rangle)$ uma variedade pseudo-Riemanniana e ∇ a conexão de Levi-Civita em Q associada a $\langle,\rangle$. A primeira identidade de Bianchi implica que

$$R_{cdab} = g_{ce}R^e{}_{dab} = g_{ce}(-R^e{}_{abd} - R^e{}_{bda}) = -R_{cabd} - R_{cbda} \tag{1}$$

Uma vez que a conexão ∇ é compatível com a métrica, o tensor de Riemann satisfaz $R_{abcd} = -R_{bacd}$. Portanto

$$R_{cdab} = R_{acbd} + R_{bcda} \tag{2}$$

Usando novamente a primeira identidade de Bianchi, a propriedade de antissimetria nos dois primeiros índices e a propriedade de antissimetria nos dois últimos índices (válida para qualquer conexão) obtemos sucessivamente

$$\begin{aligned} R_{cdab} &= R_{acbd} + R_{bcda} = (-R_{abdc} - R_{adcb}) + (-R_{bdac} - R_{bacd}) \\ &= R_{abcd} + (R_{dacb} + R_{dbac}) + R_{abcd} = 2R_{abcd} - R_{dcba} \end{aligned} \tag{3}$$

$$\iff \quad R_{cdab} + R_{dcba} = 2R_{abcd} \quad \iff \quad R_{cdab} + R_{cdab} = 2R_{abcd} \quad \iff \quad R_{cdab} = R_{abcd} \tag{4}$$

como se pretendia mostrar, para a conexão de Levi-Civita, o tensor de Riemann satisfaz a propriedade de simetria para a troca de pares de índices.

2.

Seja ∇ uma conexão simétrica em Q, $f \in C^\infty(Q, \mathbb{R})$ e T um campo tensorial em Q. Então

$$\nabla_b(f\,T) = (\nabla_b f)T + f\,\nabla_b T \tag{5}$$

$$\nabla_a\nabla_b(f\,T) = \nabla_a(\nabla_b f)T + \nabla_a(f\,\nabla_b T) = (\nabla_a\nabla_b f)T + (\nabla_b f)(\nabla_a T) + (\nabla_a f)(\nabla_b T) + f\,\nabla_a\nabla_b T \tag{6}$$

$$\begin{aligned} (\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)(f\,T) &= (\nabla_a\nabla_b f)T + (\nabla_b f)(\nabla_a T) + (\nabla_a f)(\nabla_b T) + f\,\nabla_a\nabla_b T - \\ &\quad -(\nabla_b\nabla_a f)T - (\nabla_a f)(\nabla_b T) - (\nabla_b f)(\nabla_a T) - f\,\nabla_b\nabla_a T = \\ &= (\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)f\,T + f\,(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)T \end{aligned} \tag{7}$$

Por outro lado temos que

$$[X,Y]\cdot f = \nabla_{[X,Y]}f = [X,Y]^b\nabla_b f = \left(X^a\nabla_a Y^b - Y^a\nabla_a X^b\right)\nabla_b f = (X^a\nabla_a Y^b)\nabla_b f - (Y^a\nabla_a X^b)\nabla_b f \tag{8}$$

e também

$$\begin{aligned} (\nabla_X Y - \nabla_Y X)\cdot f &= \nabla_{(\nabla_X Y - \nabla_Y X)}f = X^a\nabla_a(Y^b\nabla_b f) - Y^a\nabla_a(X^b\nabla_b f) = \\ &= (X^a\nabla_a Y^b)\nabla_b f - Y^b X^a\nabla_a\nabla_b f - (Y^a\nabla_a X^b)\nabla_b f + X^b Y^a\nabla_a\nabla_b f = \\ &= X^a Y^b(\nabla_b\nabla_a - \nabla_a\nabla_b)f + (X^a\nabla_a Y^b)\nabla_b f - (Y^a\nabla_a X^b)\nabla_b f \end{aligned} \tag{9}$$

donde concluímos que, se ∇ é uma conexão simétrica, então

$$\begin{aligned} X^a Y^b(\nabla_b\nabla_a - \nabla_a\nabla_b)f &= [X,Y]\cdot f - (\nabla_X Y - \nabla_Y X)\cdot f = 0 \\ &\Longrightarrow \quad (\nabla_b\nabla_a - \nabla_a\nabla_b)f = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Portanto

$$(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)(f\,T) = (\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)f\,T + f\,(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)T = f\,(\nabla_a\nabla_b - \nabla_b\nabla_a)T \tag{11}$$

3.

a)

Sendo ∇ uma conexão em Q, $\{X_1, \ldots, X_n\}$ uma base de campos vectoriais e $\{\omega^1, \ldots, \omega^n\}$ tem-se, por definição de formas de conexão, o seguinte

$$\omega_i^k(Z) = \Gamma_{ji}^k\,\omega^j(Z) = \Gamma_{ji}^k\,\omega^j(Z^l X_l) = \Gamma_{ji}^k\,Z^l\omega^j(X_l) = \Gamma_{ji}^k\,Z^l\delta_l^j = \Gamma_{ji}^k\,Z^j \tag{12}$$

Portanto

$$\nabla_Z X_i = \nabla_{Z^j X_j} X_i = Z^j \nabla_{X_j} X_i = Z^j \Gamma_{ji}^k X_k = \omega_i^k(Z) X_k \tag{13}$$

Tentemos agora obter uma expressão para

$$\nabla_Z \omega^i(Y) = Z(\omega^i(Y)) - \omega^i(\nabla_Z Y) \tag{14}$$

O primeiro termo pode ser expandido na seguinte forma

$$Z(\omega^i(Y)) = Z^j X_j(\omega^i(Y^l X_l)) = Z^j X_j(Y^l \omega^i(X_l)) = Z^j X_j(Y^l \delta_j^i) = Z^j(X_j \cdot Y^i) \tag{15}$$

e o segundo termo pode ser desenvolvido em

$$\begin{aligned} \omega^i(\nabla_Z Y) &= \omega^i(\nabla_{Z^j X_j} Y^k X_k) = \omega^i(Z^j \nabla_{X_j} Y^k X_k) = \omega^i\left(Z^j Y^k \nabla_{X_j} X_k + Z^j(X_j \cdot Y^k) X_k\right) \\ &= Z^j Y^k \omega^i(\Gamma_{jk}^l X_l) + Z^j(X_j \cdot Y^k)\omega^i(X_k) = Z^j Y^k \Gamma_{jk}^i + Z^j(X_j \cdot Y^i) \end{aligned} \tag{16}$$

donde

$$\begin{aligned} \nabla_Z \omega^i(Y) &= Z^j(X_j \cdot Y^i) - Z^j Y^k \Gamma_{jk}^i - Z^j(X_j \cdot Y^i) = \\ &= -Z^j Y^k \Gamma_{jk}^i = -\omega_k^i(Z)\,\omega^k(Y) \qquad\qquad \forall\, Y \in \chi(Q) \end{aligned} \tag{17}$$

Logo, provámos que $\nabla_Z \omega^i = -\omega_k^i(Z)\,\omega^k$.

b)

Seja ω uma 1-forma, $X, Y \in \chi(Q)$ e $(x^1, \ldots, x^n)$ coordenadas locais em Q. Se

$$\omega = \omega_i dx^i \quad , \quad X = X^k \frac{\partial}{\partial x^k} \quad , \quad Y = Y^l \frac{\partial}{\partial x^l} \tag{18}$$

então tem-se que

$$\begin{aligned} d\omega(X,Y) &= \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}\, dx^j \wedge dx^i \left(X^k \frac{\partial}{\partial x^k}, Y^l \frac{\partial}{\partial x^l}\right) \\ &= \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}\, \left(dx^j \otimes dx^i - dx^i \otimes dx^j\right) \left(X^k \frac{\partial}{\partial x^k}, Y^l \frac{\partial}{\partial x^l}\right) \\ &= \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}\, (X^j Y^i - X^i Y^j) \end{aligned} \tag{19}$$

Por outro lado

$$\begin{cases} X \cdot [\omega(Y)] = X^k \frac{\partial}{\partial x^k}(\omega_i Y^i) = X^k \omega_i \frac{\partial Y^i}{\partial x^k} + X^k Y^i \frac{\partial \omega_i}{\partial x^k} \\ Y \cdot [\omega(X)] = Y^l \frac{\partial}{\partial x^l}(\omega_i Y^i) = Y^l \omega_i \frac{\partial X^i}{\partial x^l} + Y^l X^i \frac{\partial \omega_i}{\partial x^l} \\ \omega([X,Y]) = \omega_i dx^i \left(\left(X^k \frac{\partial Y^l}{\partial x^k} - Y^k \frac{\partial X^l}{\partial x^k}\right) \frac{\partial}{\partial x^l}\right) = \omega_i \left(X^k \frac{\partial Y^i}{\partial x^k} - Y^k \frac{\partial X^i}{\partial x^k}\right) \end{cases} \tag{20}$$

donde se conclui

$$X \cdot [\omega(Y)] - Y \cdot [\omega(X)] - \omega([X,Y]) = \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}\, (X^j Y^i - X^i Y^j) = d\omega(X,Y) \tag{21}$$

c)

Pela alínea anterior temos que

$$d\omega^i(X,Y) = X\cdot[\omega^i(Y)] - Y\cdot[\omega^i(X)] - \omega^i([X,Y]) \tag{22}$$

Usando a alínea a) obtemos também

$$\begin{aligned}\omega^i_j\wedge\omega^j(X,Y) &= (\omega^i_j\otimes\omega^j - \omega^j\otimes\omega^i_j)(X,Y) = \omega^i_j(X)\omega^j(Y) - \omega^j(X)\omega^i_j(Y) = \\ &= -\nabla_X\,\omega^i(Y) + \nabla_Y\,\omega^i(X) = -X\cdot[\omega^i(Y)] + \omega^i(\nabla_X Y) + Y\cdot[\omega^i(X)] - \omega^i(\nabla_Y X)\end{aligned} \tag{23}$$

Somando as duas expressões ficamos com

$$d\omega^i(X,Y) + \omega^i_j\wedge\omega^j(X,Y) = \omega^i(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]) \tag{24}$$

Sendo a conexão simétrica, ∇ satisfaz $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] = 0$ e portanto obtemos o resultado pretendido

$$d\omega^i(X,Y) = -\omega^i_j\wedge\omega^j(X,Y) \tag{25}$$

d)

Por definição de tensor de Riemann tem-se

$$R_{X,Y}X_i = \nabla_{[X,Y]}X_i - [\nabla_X,\nabla_Y]X_i = \nabla_{[X,Y]}X_i - \nabla_X(\nabla_Y X_i) + \nabla_Y(\nabla_X X_i) \tag{26}$$

Fazendo uso da primeira identidade provada na alínea a) obtemos

$$\begin{aligned}R_{X,Y}X_i &= \omega^j_i([X,Y])X_j - \nabla_X\left(\omega^j_i(Y)X_j\right) + \nabla_Y\left(\omega^j_i(X)X_j\right) \\ &= \omega^j_i([X,Y])X_j - (X\cdot[\omega^j_i(Y)])X_j - \omega^j_i(Y)\nabla_X X_j + \\ &\quad +(Y\cdot[\omega^j_i(X)])X_j + \omega^j_i(X)\nabla_Y X_j \\ &= -\left\{X\cdot[\omega^j_i(Y)] - Y\cdot[\omega^j_i(X)] - \omega^j_i([X,Y])\right\}X_j - \\ &\quad -\omega^j_i(Y)\omega^k_j(X)X_k + \omega^j_i(X)\omega^k_j(Y)X_k \\ &= -\left\{X\cdot[\omega^j_i(Y)] - Y\cdot[\omega^j_i(X)] - \omega^j_i([X,Y])\right\}X_j + \\ &\quad +\left(\omega^j_i\otimes\omega^k_j - \omega^k_j\otimes\omega^j_i\right)(X,Y)X_k \\ &= -\left\{X\cdot[\omega^j_i(Y)] - Y\cdot[\omega^j_i(X)] - \omega^j_i([X,Y])\right\}X_j + \omega^j_i\wedge\omega^k_j(X,Y)X_k\end{aligned} \tag{27}$$

Utilizando agora a identidade provada na alínea b) para a 1-forma de conexão ω^j_i obtemos o resultado pretendido:

$$R_{X,Y}X_i = -d\omega^j_i(X,Y)X_j + \omega^j_i\wedge\omega^k_j(X,Y)X_k = \left[-d\omega^k_i(X,Y) + \omega^j_i\wedge\omega^k_j(X,Y)\right]X_k \tag{28}$$

Obtemos as forma de curvatura através de

$$\Omega^k_i(X,Y) = \omega^k(R_{X,Y}X_i) = -d\omega^k_i(X,Y) + \omega^j_i\wedge\omega^k_j(X,Y) \qquad ,\forall X,Y\in\chi(Q) \tag{29}$$

Pelo que $\Omega^k_i = -d\omega^k_i + \omega^j_i\wedge\omega^k_j$.

4.

Consideremos a métrica de Poincaré dada por

$$g = \frac{1}{y^2} dx \otimes dx + \frac{1}{y^2} dy \otimes dy = \omega^x \otimes \omega^x + \omega^y \otimes \omega^y \tag{30}$$

com $\omega^x = \frac{1}{y}dx$ e $\omega^y = \frac{1}{y}dy$.

Uma vez que a base $\{\omega^x, \omega^y\}$, dual de $\{y\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\}$, é ortonormal tem-se que $\omega^i_j = -\omega^j_i$. Logo

$$\omega^x_x = \omega^y_y = 0 \qquad\qquad \omega^x_y = -\omega^y_x \tag{31}$$

Podemos determinar as formas de conexão usando a 1^aequação estrutural de Cartan:

$$\begin{aligned} d\omega^x &= -\frac{1}{y^2} dy \wedge dx = -\omega^y \wedge \omega^x = \omega^x \wedge \omega^x_x + \omega^y \wedge \omega^x_y = \omega^y \wedge \omega^x_y \\ \Longrightarrow & \qquad \omega^x_y = -\omega^x = -\omega^y_x \end{aligned} \tag{32}$$

As formas de curvatura são determinadas pela 2^aequação estrutural de Cartan. As únicas não-nulas são

$$\Omega^x_y = -\Omega^y_x = -d\omega^x_y = d\omega^x = d\left(\frac{1}{y}dx\right) = -\frac{1}{y^2} dy \wedge dx = \omega^x \wedge \omega^y \tag{33}$$

Visto que $\Omega^i_j = R^i{}_{jkl}\, \omega^k \wedge \omega^l$, concluímos que

$$R^x{}_{yxy} = R_{xyxy} = 1 \qquad\qquad R^y{}_{xxy} = R_{yxxy} = -1 \tag{34}$$

Todas as outras componentes do tensor de Riemann (que não estejam relacionadas com estas por relações de simetria) são nulas.

As componentes do tensor de Ricci são

$$\begin{cases} R_{xx} = R_{xxxx} + R_{yxyx} = -R_{yxxy} = 1 \\ R_{yy} = R_{xyxy} + R_{yyyy} = R_{xyxy} = 1 \\ R_{xy} = R_{yx} = 0 \end{cases} \tag{35}$$

Finalmente, a curvatura escalar é igual a

$$R = \sum_i R_{ii} = R_{xx} + R_{yy} = 2 \tag{36}$$

5.

Sendo o elemento de linha

$$ds^2 = A^2(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{37}$$

podemos escrever a métrica na forma

$$g = \omega^r \otimes \omega^r + \omega^\theta \otimes \omega^\theta + \omega^\varphi \otimes \omega^\varphi \tag{38}$$

onde $\omega^r = A(r)dr$, $\omega^\theta = rd\theta$, $\omega^\varphi = r\sin\theta d\varphi$.

A base $\{\omega^r, \omega^\theta, \omega^\varphi\}$ é a base dual de $\{\frac{1}{A(r)}\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\}$ e é ortonormal. Portanto

$$\begin{cases} \omega^r_r = \omega^\theta_\theta = \omega^\varphi_\varphi = 0 \\ \omega^r_\theta = -\omega^\theta_r \\ \omega^r_\varphi = -\omega^\varphi_r \\ \omega^\theta_\varphi = -\omega^\varphi_\theta \end{cases} \tag{39}$$

Usando a 1^aequação estrutural de Cartan obtemos as formas de conexão:

$$
\begin{aligned}
d\omega^r &= 0 = \omega^\theta \wedge \omega^r_\theta + \omega^\varphi \wedge \omega^r_\varphi && (40)\\
d\omega^\theta &= dr \wedge d\theta = \frac{1}{rA(r)}\omega^r \wedge \omega^\theta = \omega^r \wedge \omega^\theta_r + \omega^\varphi \wedge \omega^\theta_\varphi && (41)\\
d\omega^\varphi &= \sin\theta dr \wedge d\varphi + r\cos\theta d\theta \wedge d\varphi = \frac{1}{rA(r)}\omega^r \wedge \omega^\varphi + \frac{1}{r\tan\theta}\omega^\theta \wedge \omega^\varphi = \omega^r \wedge \omega^\varphi_r + \omega^\theta \wedge \omega^\varphi_\theta && (42)
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \begin{cases} \omega^\varphi_r = \frac{1}{rA(r)}\omega^\varphi \\ \omega^\varphi_\theta = \frac{1}{r\tan\theta}\omega^\varphi \\ \omega^\theta_r = \frac{1}{rA(r)}\omega^\theta \end{cases} \tag{43}
$$

As formas de curvatura não-nulas são

$$
\begin{aligned}
\Omega^r_\theta &= -d\omega^r_\theta + \omega^\varphi_\theta \wedge \omega^r_\varphi = d\omega^\theta_r - \omega^\varphi_\theta \wedge \omega^\varphi_r = \\
&= -\frac{A(r) + r\frac{dA}{dr}}{r^2A^2(r)} dr \wedge \omega^\theta + \frac{1}{rA(r)} d\omega^\theta + \frac{1}{r^2A(r)\tan\theta}\omega^\theta \wedge \omega^\theta = \\
&= -\frac{A(r) + r\frac{dA}{dr}}{r^2A^3(r)}\omega^r \wedge \omega^\theta + \frac{1}{r^2A^2(r)}\omega^r \wedge \omega^\theta = -\frac{1}{rA^3(r)}\frac{dA}{dr}\omega^r \wedge \omega^\theta && (44)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Omega^\theta_\varphi &= -d\omega^\theta_\varphi + \omega^r_\varphi \wedge \omega^\theta_r = d(\cos\theta d\varphi) - \frac{1}{r^2A^2(r)}\omega^\varphi \wedge \omega^\theta = \\
&= -\sin\theta d\theta \wedge d\varphi + \frac{1}{r^2A^2(r)}\omega^\theta \wedge \omega^\varphi = \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{A^2(r)} - 1\right)\omega^\theta \wedge \omega^\varphi && (45)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Omega^r_\varphi &= -d\omega^r_\varphi + \omega^\theta_\varphi \wedge \omega^r_\theta = d\left(\frac{1}{rA(r)}\omega^\varphi\right) + \frac{1}{r^2A(r)\tan\theta}\omega^\varphi \wedge \omega^\theta = \\
&= -\frac{A(r) + r\frac{dA}{dr}}{r^2A^3(r)}\omega^r \wedge \omega^\varphi + \frac{1}{rA(r)} d\omega^\varphi - \frac{1}{r^2A(r)\tan\theta}\omega^\theta \wedge \omega^\varphi = \\
&= -\frac{A(r) + r\frac{dA}{dr}}{r^2A^3(r)}\omega^r \wedge \omega^\varphi + \frac{1}{r^2A^2(r)}\omega^r \wedge \omega^\varphi + \frac{1}{r^2A(r)\tan\theta}\omega^\theta \wedge \omega^\varphi - \frac{1}{r^2A(r)\tan\theta}\omega^\theta \wedge \omega^\varphi = \\
&= -\frac{1}{rA^3(r)}\frac{dA}{dr}\omega^r \wedge \omega^\varphi && (46)
\end{aligned}
$$

Daqui podemos ler as componentes do tensor de Riemann:

$$
R^r{}_{\theta r\theta} = R^r{}_{\varphi r\varphi} = -\frac{1}{rA^3(r)}\frac{dA}{dr} \qquad R^\theta{}_{\varphi\theta\varphi} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{A^2(r)} - 1\right) \tag{47}
$$

As componentes não-nulas do tensor de Ricci são

$$
\begin{aligned}
R_{rr} &= R_{\theta r\theta r} + R_{\varphi r\varphi r} = R_{r\theta r\theta} + R_{r\varphi r\varphi} = -\frac{2}{rA^3(r)}\frac{dA}{dr} && (48)\\
R_{\theta\theta} &= R_{r\theta r\theta} + R_{\varphi\theta\varphi\theta} = -\frac{1}{rA^3(r)}\frac{dA}{dr} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{A^2(r)} - 1\right) = R_{r\varphi r\varphi} + R_{\theta\varphi\theta\varphi} = R_{\varphi\varphi} && (49)
\end{aligned}
$$

e portanto o escalar de curvatura é igual a

$$
R = R_{rr} + R_{\theta\theta} + R_{\varphi\varphi} = -\frac{4}{rA^3(r)}\frac{dA}{dr} + \frac{2}{r^2}\left(\frac{1}{A^2(r)} - 1\right) \tag{50}
$$

Quando $A^2(r) = \frac{1}{1-r^2}$, $\frac{1}{A^3}\frac{dA}{dr} = r$ e obtém-se

$$
R = -\frac{4}{r}r + \frac{2}{r^2}\left(1 - r^2 - 1\right) = -6 \tag{51}
$$

Quando $A^2(r) = \frac{1}{1+r^2}$, $\frac{1}{A^3}\frac{dA}{dr} = -r$ e obtém-se

$$R = -\frac{4}{r}(-r) + \frac{2}{r^2}\left(1 + r^2 - 1\right) = +6 \tag{52}$$

Vejamos agora para que funções $A(r)$ é constante a curvatura escalar. Para isso comecemos por definir a nova função $W(r) = A^{-2}(r)$. Partindo da expressão (50) a curvatura escalar escreve-se então

$$R = \frac{2}{r}\frac{dW}{dr} + \frac{2}{r}(W-1) \tag{53}$$

Esta é uma equação diferencial de primeira ordem para W e a solução é

$$W(r) = 1 + \frac{R}{6}r^2 \tag{54}$$

Portanto as funções $A(r)$ para as quais a curvatura escalar é constante são as funções cujo quadrado é da seguinte forma

$$A^2(r) = \frac{1}{1 + \frac{R}{6}r^2} \tag{55}$$

Notamos que obtemos S^3 e o espaço hiperbólico quando R é igual a -6 e 6, respectivamente.

6.

No exercício 4 da 2^asérie de problemas provamos que as trajectórias de partículas materiais sujeitas ao potencial gravitacional $\phi = \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, soluções das equações $\frac{d^2x^i}{dt^2} = -\frac{\partial\phi}{\partial x^i}$ $(i = 1,2,3)$, são geodésicas da conexão simétrica definida por

$$\Gamma^x_{tt} = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \qquad \Gamma^y_{tt} = \frac{\partial\phi}{\partial y}, \qquad \Gamma^z_{tt} = \frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{56}$$

a)

A base dual de $\{\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\}$ é $\{\omega^t = dt, \omega^x = dx, \omega^y = dy, \omega^z = dz\}$. As formas de conexão são obtidas através da expressão $\omega^i_j = \Gamma^i_{kj}\omega^k$. Deste modo, resulta que todas as formas de conexão são nulas excepto

$$\omega^x_t = \Gamma^x_{tt}dt = \frac{\partial\phi}{\partial x}dt, \qquad \omega^y_t = \Gamma^y_{tt}dt = \frac{\partial\phi}{\partial y}dt, \qquad \omega^z_t = \Gamma^z_{tt}dt = \frac{\partial\phi}{\partial z}dt \tag{57}$$

b)

Da fórmula da derivada covariante para formas temos, em coordenadas locais $(x^0 = t, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z)$,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} dt\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \quad &= \quad \frac{\partial}{\partial x^i}\left(dt\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right) - dt\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\
&= \quad -dt\left(\Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = -\Gamma^t_{ij} \\
\Longleftrightarrow \quad & \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} dt = -\Gamma^t_{ij}dx^j \\
\Longleftrightarrow \quad & \quad \nabla dt = -\Gamma^t_{ij}dx^i \otimes dx^j
\end{aligned} \tag{58}$$

Como todos os símbolos de Christoffel com índice superior igual a t são nulos o resultado segue imediatamente

$$\nabla dt = 0 \tag{59}$$

c)

As formas de curvatura obtêm-se facilmente a partir das formas de conexão, usando a 2^aequação estrutural de Cartan

$$\Omega^i_j = -d\omega^i_j + \omega^k_j \wedge \omega^i_k \tag{60}$$

Uma vez que qualquer forma de conexão com índice superior igual a t é nulo, segue imediatamente que

$$\Omega^t_t = \Omega^t_x = \Omega^t_y = \Omega^t_z = 0 \tag{61}$$

É também fácil ver que, se nenhum dos índices é igual a t, então a forma de curvatura é nula

$$\Omega^x_x = \Omega^x_y = \Omega^x_z = \Omega^y_x = \Omega^y_y = \Omega^y_z = \Omega^z_x = \Omega^z_y = \Omega^z_z = 0 \tag{62}$$

Portanto, restam apenas

$$\begin{cases} \Omega^x_t = -d\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}dt\right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}dt \wedge dx + \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}dt \wedge dy + \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x}dt \wedge dz \\ \Omega^y_t = -d\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}dt\right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}dt \wedge dx + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}dt \wedge dy + \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}dt \wedge dz \\ \Omega^z_t = -d\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}dt\right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}dt \wedge dx + \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}dt \wedge dy + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}dt \wedge dz \end{cases} \tag{63}$$

d)

Da alínea anterior podemos ler directamente as componentes do tensor de Riemann:

$$\begin{array}{ccc} R^x{}_{ttx} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} & R^x{}_{tty} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} & R^x{}_{ttz} = \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x} \\ R^y{}_{ttx} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} & R^y{}_{tty} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} & R^y{}_{ttz} = \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y} \\ R^z{}_{ttx} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z} & R^z{}_{tty} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} & R^z{}_{ttz} = \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \end{array} \tag{64}$$

Se ∇ fosse a conexão de Levi-Civita de alguma métrica pseudo-Riemanniana em $\mathbb{R}^4$, então (pelo exercício 1) o tensor de Riemann tinha que ser simétrico em relação à troca de pares de índices. Para ∇ ser a conexão de Levi-Civita de alguma métrica pseudo-Riemanniana tem que ser então

$$R_{ittj} = g_{ik}R^k{}_{ttj} = g_{ik}\frac{\partial^2\phi}{\partial x^j\partial x^k} \quad = \quad R_{tjit} = 0 \qquad (i,j,k = t,x,y,z) \tag{65}$$

Sejam $\mathbf{G}$ e $\mathbf{\Phi}_j$ a matriz e os vectores coluna, respectivamente, definidos por

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{tx} & g_{ty} & g_{tz} \\ g_{xt} & g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{yt} & g_{yx} & g_{yy} & g_{yz} \\ g_{zt} & g_{zx} & g_{zy} & g_{zz} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{\Phi}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x^j\partial x} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x^j\partial y} \\ \frac{\partial^2\phi}{\partial x^j\partial z} \end{pmatrix} \tag{66}$$

Deste modo as equações (65) escrevem-se simplesmente

$$\mathbf{G}\mathbf{\Phi}_j = \mathbf{0} \qquad (j = t,x,y,z) \tag{67}$$

Uma vez que as três últimas entradas dos vectores $\mathbf{\Phi}_j$ são exactamente as componentes não-nulas do tensor de Riemann, exigir que $R^a{}_{bcd} \neq 0$ é equivalente a dizer que a matriz $\mathbf{G}$ tem nulidade maior ou igual a 1 e portanto é singular. Assim, se ∇ não fosse a conexão de Levi-Civita de alguma métrica pseudo-Riemanniana g então $g(\cdot,\cdot)$ teria que ser uma aplicação degenerada contrariando a hipótese de g ser métrica.

Portanto, ∇ não é a conexão de Levi-Civita de nenhuma métrica pseudo-Riemanniana em $\mathbb{R}^4$.

e)

O tensor de Ricci obtém-se a partir do tensor de Riemann por contracção dos primeiro e terceiro índices:

$$R_{tt} = R_{xtxt} + R_{ytyt} + R_{ztzt} = -\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right) = -\nabla^2\phi \tag{68}$$

$$R_{ij} = 0 \qquad \text{se} \quad i \neq t \quad \text{ou} \quad j \neq t \tag{69}$$

Portanto o tensor de Ricci é

$$R_{ab} = -\nabla^2\phi\, dt \otimes dt \tag{70}$$

Daqui concluímos que

$$R_{ab} = 4\pi T_{ab} = 4\pi\rho\, dt \otimes dt \qquad \Longleftrightarrow \qquad \nabla^2\phi = -4\pi\rho \tag{71}$$

7.

Seja $(Q, \langle , \rangle)$ uma variedade Riemanniana associada a uma sistema mecânico, $K : TQ \longrightarrow \mathbb{R}$ a energia cinética dada por $K(v_p) = \frac{1}{2}\langle v_p, v_p\rangle$, $\mu : TQ \longrightarrow TQ^*$ o operador de massa definido por $\mu(v_p)(w_p) = \langle v_p, w_p\rangle$, $c : I \longrightarrow Q$ uma curva C^∞ e $(q^1, \ldots, q^n)$ coordenadas locais em Q. Vejamos o resultado da transformação de Legendre de cada um dos vectores de base $\frac{\partial}{\partial q^i}$ através do operador $\mu(\frac{D\dot{c}}{dt})$:

$$\begin{aligned}
\mu\left(\frac{D\dot{c}}{dt}\right)\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right) &= \left\langle \frac{D\dot{c}}{dt}, \frac{\partial}{\partial q^i}\right\rangle = \left\langle \left(\frac{d\dot{q}^j}{dt} + \Gamma^j_{lk}\dot{q}^l\dot{q}^k\right)\frac{\partial}{\partial q^j}, \frac{\partial}{\partial q^i}\right\rangle \\
&= \left(\frac{d\dot{q}^j}{dt} + \Gamma^j_{lk}\dot{q}^l\dot{q}^k\right)\left\langle \frac{\partial}{\partial q^j}, \frac{\partial}{\partial q^i}\right\rangle
\end{aligned} \tag{72}$$

No problema 7 da 2^asérie de exercícios provámos que esta última expressão é igual ao primeiro membro da equação de Euler-Lagrange em que o Lagrangeano era dado por $L = \frac{1}{2}\langle \dot{c}, \dot{c}\rangle$, ou seja, a energia cinética $K(\dot{c})$. Sendo assim, temos

$$\begin{aligned}
\mu\left(\frac{D\dot{c}}{dt}\right)\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right) &= \left(\frac{d\dot{q}^j}{dt} + \Gamma^j_{lk}\dot{q}^l\dot{q}^k\right)\left\langle \frac{\partial}{\partial q^j}, \frac{\partial}{\partial q^i}\right\rangle \\
&= \frac{\partial^2 K}{\partial\dot{q}^j\partial\dot{q}^i}\ddot{q}^j + \frac{\partial^2 K}{\partial q^j\partial\dot{q}^i}\dot{q}^j - \frac{\partial K}{\partial q^i} \\
&= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial\dot{q}^i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q^i} \\
&= \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial\dot{q}^j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q^j}\right] dq^j\left(\frac{\partial}{\partial q^i}\right)
\end{aligned} \tag{73}$$

Uma vez que a expressão é válida para qualquer vector da base $\frac{\partial}{\partial q^i}$, conclui-se que

$$\mu\left(\frac{D\dot{c}}{dt}\right) = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial\dot{q}^j}\right) - \frac{\partial K}{\partial q^j}\right] dq^j \tag{74}$$

8.

Para um sistema mecânico conservativo $(Q, \langle,\rangle, -dU)$ a lei de Newton escreve-se da seguinte forma

$$\mu\left(\frac{D\dot{c}}{dt}\right) = \mathcal{F} = -dU \tag{75}$$

Usando o resultado do problema 7, obtemos então (tendo em conta que $U = U(q)$)

$$\begin{aligned} \mu\left(\frac{D\dot{c}}{dt}\right) &= \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q^i}\right] dq^i = -dU = -\frac{\partial U}{\partial q^i} dq^i \\ \Longleftrightarrow &\quad \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial K}{\partial q^i} + \frac{\partial U}{\partial q^i}\right] dq^i = 0 \\ \Longleftrightarrow &\quad \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (K-U)}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial (K-U)}{\partial q^i}\right] dq^i = 0 \end{aligned} \tag{76}$$

ou seja, os movimentos do sistema mecânico conservativo são as soluções das equações de Euler-Lagrange para o Lagrangeano $L = K - U$.

9.

Como vimos na aula, a conexão de Levi-Civita é definida pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} 2 << \tilde{\nabla}_X Y, Z >> &= Y << X, Z >> + X << Z, Y >> - Z << X, Y >> \\ &- << X, [Y, Z] >> + << Y, [Z, X] >> + << Z, [X, Y] >> \end{aligned} \tag{77}$$

Usando a relação $<<, >> = e^{2\rho} \langle,\rangle$ obtemos

$$\begin{aligned} Y &< < X, Z >> = Y(e^{2\rho}\langle X, Z\rangle) = e^{2\rho} Y \langle X, Z\rangle + \langle X, Z\rangle Y(e^{2\rho}) \\ &= e^{2\rho}\{Y\langle X, Z\rangle + \langle X, Z\rangle Y(2\rho)\} \end{aligned} \tag{78}$$

$$\begin{aligned} X &< < Z, Y >> = X(e^{2\rho}\langle Z, Y\rangle) = e^{2\rho} X \langle Z, Y\rangle + \langle Z, Y\rangle X(e^{2\rho}) \\ &= e^{2\rho}\{X\langle Z, Y\rangle + \langle Z, Y\rangle X(2\rho)\} \end{aligned} \tag{79}$$

$$\begin{aligned} Z &< < X, Y >> = Z(e^{2\rho}\langle X, Y\rangle) = e^{2\rho} Z \langle X, Y\rangle + \langle X, Y\rangle Z(e^{2\rho}) \\ &= e^{2\rho}\{Z\langle X, Y\rangle + \langle X, Y\rangle Z(2\rho)\} \end{aligned} \tag{80}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 2 &< < \tilde{\nabla}_X Y, Z >> = e^{2\rho}\{Y\langle X, Z\rangle + X\langle Z, Y\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ &+ \langle X, Z\rangle Y(2\rho) + \langle Z, Y\rangle X(2\rho) - \langle X, Y\rangle Z(2\rho) \\ &- \langle X, [Y, Z]\rangle + \langle Y, [Z, X]\rangle + \langle Z, [X, Y]\rangle \end{aligned} \tag{81}$$

Usando novamente a expressão que define a conexão, agora para a conexão ∇, obtemos

$$\begin{aligned} 2 &< < \tilde{\nabla}_X Y, Z >> = 2e^{2\rho}\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \\ &\quad + e^{2\rho}\{\langle X, Z\rangle Y(2\rho) + \langle Z, Y\rangle X(2\rho) - \langle X, Y\rangle Z(2\rho)\} \\ &= 2 << \nabla_X Y, Z >> + << X, Z >> Y(2\rho) + \\ &< < Z, Y >> X(2\rho) - << X, Y >> Z(2\rho) \\ &= 2 << \nabla_X Y, Z >> + 2 << X, Z >> d\rho(Y) + \\ 2 &< < Z, Y >> d\rho(X) - 2 << X, Y >> d\rho(Z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow &\quad << \tilde{\nabla}_X Y, Z >> = << \nabla_X Y, Z >> + << X, Z >> d\rho(Y) \\ + &< < Y, Z >> d\rho(X) - << X, Y >> d\rho(Z) \end{aligned} \tag{82}$$

Sendo $\text{grad}\rho = \mu^{-1}(d\rho)$, então $d\rho(Z) = \mu(\text{grad}\rho)(Z) = \langle \text{grad}\rho, Z\rangle$. Logo

$$\begin{aligned}
&<< \tilde{\nabla}_X Y, Z >>=<< (\nabla_X Y + d\rho(Y)X + d\rho(X)Y), Z >> \\
&- << X, Y >> \langle \text{grad}\rho, Z\rangle \\
&=<< (\nabla_X Y + d\rho(X)Y + d\rho(Y)X), Z >> - \langle X, Y\rangle << \text{grad}\rho, Z >> \\
&=<< (\nabla_X Y + d\rho(X)Y + d\rho(Y)X - \langle X, Y\rangle \,\text{grad}\rho), Z >>
\end{aligned} \tag{83}$$

Uma vez que esta expressão é válida para todo o $Z \in \chi(Q)$, concluímos que

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + d\rho(X)Y + d\rho(Y)X - \langle X, Y\rangle \,\text{grad}\rho \tag{84}$$

10.

a)

Com o Lagrangeano dado por $L = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r)$, as equações de Euler-Lagrange escrevem-se

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{dU}{dr} = 0 \\ r(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \end{cases} \tag{85}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + U(r)\right] = \dot{r}\ddot{r} + \frac{1}{2}(2r\dot{r}\dot{\theta}^2 + 2r^2\dot{\theta}\ddot{\theta}) + \dot{r}\frac{dU}{dr} \\
&= \dot{r}\left(\ddot{r} + r\dot{\theta}^2 + \frac{dU}{dr}\right) + r^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = \dot{r}\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{dU}{dr}\right) + r^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta}^2 \\
&= \dot{r}\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{dU}{dr}\right) + r\dot{\theta}(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0
\end{aligned} \tag{86}$$

$$\frac{dl}{dt} = \frac{d}{dt}\left[r^2\dot{\theta}\right] = 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = r(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \tag{87}$$

ou seja, a energia E e o momento angular l são primeiros integrais.

b)

Começamos por notar que

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{\dot{r}^2}{\dot{\theta}^2} \tag{88}$$

Fazendo então as substituições

$$\dot{r}^2 = 2(E - U(r)) - r^2\dot{\theta}^2 \qquad\qquad \dot{\theta} = \frac{l}{r^2} \tag{89}$$

ficamos com

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2(E - U(r)) - r^2\dot{\theta}^2}{\dot{\theta}^2} = \frac{2(E - U(r))}{\dot{\theta}^2} - r^2 = \frac{2r^4(E - U(r))}{l^2} - r^2 \tag{90}$$

Para $U(r) = -1/r$ obtemos

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2r^4(E + \frac{1}{r})}{l^2} - r^2 = \frac{2E}{l^2}r^4 + \frac{2}{l^2}r^3 - r^2 \tag{91}$$

c)

Com a mudança de variável

$$u = \frac{1}{r} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta} \tag{92}$$

a equação acima obtida escreve-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{u^4}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 &= \frac{2E}{l^2}\frac{1}{u^4} + \frac{2}{l^2}\frac{1}{u^3} - \frac{1}{u^2} \\ \Longleftrightarrow \qquad \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 &= \frac{2E}{l^2} + \frac{2}{l^2}u - u^2 \end{aligned} \tag{93}$$

Derivando em relação a θ obtemos

$$2\frac{du}{d\theta}\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{2}{l^2}\frac{du}{d\theta} - 2u\frac{du}{d\theta} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{l^2} \tag{94}$$

(tendo ficado de fora a solução $u(\theta) = c^{te}$)

Podemos resolver esta equação diferencial linear de segunda ordem pelo método da variação das constantes. Para a equação homogénea temos

$$\begin{aligned} (D^2+1)u &= 0 \quad \Longrightarrow \\ u(\theta) &= c_1 e^{i\theta} + c_2 e^{-i\theta} \\ &= (c_1+c_2)\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} + (c_1-c_2)\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2} \\ &= k_1\cos\theta + k_2\sin\theta \end{aligned} \tag{95}$$

Uma vez que $u(\theta) = \frac{1}{l^2}$ é uma solução particular do problema, concluímos que a solução geral é

$$u(\theta) = \frac{1}{l^2} + k_1\cos\theta + k_2\sin\theta \tag{96}$$

Portanto,

$$r(\theta) = \frac{1}{u(\theta)} = \frac{l^2}{1 + l^2(k_1\cos\theta + k_2\sin\theta)} \tag{97}$$

d)

Vejamos quais as trajectórias que correspondem à solução da alínea anterior. Para isso passamos para coordenadas cartesianas através da mudança de coordenadas

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \tag{98}$$

Então (97) escreve-se

$$\begin{aligned} r + l^2\left(k_1 r\cos\theta + k_2 r\sin\theta\right) = l^2 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad \sqrt{x^2+y^2} = l^2\left(1 - k_1x - k_2y\right) \\ \Longleftrightarrow \qquad \frac{1-l^4k_1^2}{l^4}x^2 + \frac{1-l^4k_1^2}{l^4}y^2 &- 2k_1k_2xy + 2k_1x + 2k_2y = 1 \end{aligned} \tag{99}$$

A última equação é uma equação quadrática em x e y e portanto as trajetórias das partículas no potencial de Coulomb são as cónicas.

O teorema de Jacobi permite identificar os movimentos do sistema mecânico conservativo $(Q, \langle,\rangle, -dU)$ com energia mecânica h com as geodésicas, a menos de reparametrização, de $(Q_h, \langle\langle,\rangle\rangle)$ onde $\langle\langle,\rangle\rangle$ é a métrica de Jacobi:

$$\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle = 2\left(h - U(r)\right)\langle\cdot,\cdot\rangle \tag{100}$$

e $Q_h = \{p \in Q : U(p) < h\}$. Sendo $U(r) = -\frac{1}{r}$ e

$$\left\langle \dot r\frac{\partial}{\partial r} + \dot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}, \dot r\frac{\partial}{\partial r} + \dot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right\rangle = \left(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2\right) \tag{101}$$

concluímos que as cónicas com energia mecânica 0 são as geodésicas de $\left(\mathbb{R}^2, \langle\langle,\rangle\rangle\right)$ onde $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle = \frac{2}{r}\langle\cdot,\cdot\rangle$. Uma vez que as geodésica da métricas $ds^2 = \frac{2}{r}(dr^2+r^2d\theta^2)$ e $ds^2 = \frac{1}{r}(dr^2+r^2d\theta^2)$ são iguais, obtemos para geodésicas de $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ (na origem o potencial é infinito) com a métrica $ds^2 = \frac{1}{r}(dr^2 + r^2d\theta^2)$ as cónicas com energia mecânica nula e estas são exactamente as parábolas cujo eixo intersecta a origem e cujo lado côncavo contém a origem.