

Mecânica Geométrica

2ª Série de Problemas

Jorge Rocha, nº45344

30 de Abril de 2001

1.

Seja (\mathcal{U}, φ) uma carta local para uma variedade diferenciável M de dimensão n e $\varphi^{-1} = (x^1, \dots, x^n)$ coordenadas locais associadas à carta (\mathcal{U}, φ) . Seja ainda $g = g_{ij}(x)dx^i \otimes dx^j$ um campo tensorial de tipo $\binom{0}{2}$, onde $(g_{ij})(x) \in M_{n \times n}, \forall x \in \mathcal{U}$.

Mostremos que se a matriz (g_{ij}) é simétrica e $\det(g_{ij}) \neq 0$ então g é uma métrica pseudo-Riemanniana. Se $X_x, Y_x \in T_x M$ então, da hipótese de simetria da matriz (g_{ij}) , vem

$$\begin{aligned} g(X_x, Y_x) &= g_{ij}(x)dx^i \otimes dx^j(X_x, Y_x) = g_{ij}(x)dx^i(X_x).dx^j(Y_x) \\ &= g_{ji}(x)dx^j(X_x).dx^i(Y_x) = g_{ij}(x)dx^i(Y_x).dx^j(X_x) \\ &= g_{ij}(x)dx^i \otimes dx^j(Y_x, X_x) = g(Y_x, X_x) \quad , \forall X_x, Y_x \in T_x M \end{aligned} \quad (1)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} g(X_x, Y_x) &= g_{ij}(x)dx^i(X_x).dx^j(Y_x) = 0 \quad \forall Y_x \in T_x M \\ \implies &g_{ij}(x)dx^i(X_x) = 0 \quad , \forall j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2)$$

A equação (2) é de facto um sistema de equações lineares que pode ser escrito na forma $\mathbf{G} \cdot \mathbf{x} = 0$, onde $\mathbf{G} = (g_{ij})^T$ e

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} dx^1(X_x) \\ \vdots \\ dx^n(X_x) \end{pmatrix} \quad (3)$$

Se $\det(g_{ij})^T = \det(g_{ij}) \neq 0$, a matriz \mathbf{G} é não-singular e o sistema de equações tem apenas a solução trivial $\mathbf{x} = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} dx^i(X_x) &= 0 \\ \iff &dx^i \left(X_x^k \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = 0 \\ \iff &X_x^K \cdot \delta_k^i = X_x^i = 0 \quad , \forall i = 1, \dots, n \\ \implies &X_x = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Mostremos agora que se g é uma métrica pseudo-Riemanniana então (g_{ij}) é simétrica e $\det(g_{ij}) \neq 0$. Sendo g uma métrica pseudo-Riemanniana, satisfaz $g(X_x, Y_x) = g(Y_x, X_x)$, $\forall X_x, Y_x \in T_x M$. Logo

$$\begin{aligned} g_{ij}(x)dx^i(X_x).dx^j(Y_x) &= g(X_x, Y_x) = g(Y_x, X_x) \\ &= g_{ij}(x)dx^i(Y_x).dx^j(X_x) = g_{ji}(x)dx^i(X_x).dx^j(Y_x) \\ \implies &g_{ij}(x) = g_{ji}(x) \end{aligned} \quad (5)$$

Por outro lado, se g é uma métrica pseudo-Riemanniana, a aplicação linear $G : T_x M \longrightarrow T_x^* M$ definida por

$$G(X_x) = g_{ij}(x)dx^i(X_x).dx^j = g_{ij}(x)X_x^i.dx^j \quad (6)$$

é uma bijecção, o que implica que $\text{Ker } G = 0$. Uma vez que $G \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right) = g_{ij}(x).\delta_k^i.dx^j = g_{kj}(x).dx^j$, a matriz que representa a transformação linear é exactamente

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{1n} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} = (g_{ij})^T \quad (7)$$

Portanto a matriz $(g_{ij})^T$ é não-singular e

$$\det(g_{ij}) = \det(g_{ij})^T \neq 0 \quad (8)$$

como se pretendia provar.

Mostremos ainda que g é uma métrica Riemanniana sse adicionalmente a matriz (g_{ij}) é definida positiva. Tem-se

$$\begin{aligned} g(X_x, X_x) &= g_{ij}(x) dx^i(X_x) \cdot dx^j(X_x) = g_{ij}(x) X_x^i \cdot X_x^j \\ &= \begin{pmatrix} X_x^1 & \cdots & X_x^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_x^1 \\ \vdots \\ X_x^n \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

ou seja, a métrica g define uma forma quadrática cuja matriz simétrica associada é (g_{ij}) . Da álgebra linear, sabemos então que $g(X_x, X_x) > 0, \forall X_x (\neq 0) \in T_x M$ (isto é, a métrica g é Riemanniana) é equivalente a (g_{ij}) ser definida positiva.

2.

Considere-se o grupo G de transformações afins próprias de \mathbb{R} ,

$$G = \{g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid g(t) = yt + x, x, y \in \mathbb{R}, y > 0\} \quad (10)$$

com produto dado pela composição de funções.

a) Seja $\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ e $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow G$ definida por

$$\varphi(x, y) = yt + x \quad (11)$$

Então (φ, \mathcal{U}) é uma carta local para G . Uma vez que a carta cobre o grupo todo, é na verdade uma carta global e, deste modo, G adquire estrutura de variedade diferenciável.

Sejam $g, h \in G$ com $g(t) = yt + x, h(t) = wt + z$. Então

$$g \circ h(t) = y(wt + z) + x = (yw)t + (x + yz) \quad (12)$$

Em termos da carta global (φ, \mathcal{U}) fica

$$(x, y) \cdot (z, w) = \varphi^{-1}(g) \cdot \varphi^{-1}(h) = \varphi^{-1}(g \circ h) = (x + yz, yw) \quad (13)$$

(isto significa que φ é um homomorfismo de grupos, em que o produto em \mathcal{U} é definido pela equação acima). Para mostrar que G é grupo falta verificar a existência de identidade e de inversa para cada elemento (uma vez que a composição de funções satisfaz a associatividade).

A identidade em G é $e(t) = t$:

$$g \circ e(t) = yt + x = g(t) \quad (14)$$

$$e \circ g(t) = yt + x = g(t) \quad (15)$$

A inversa do elemento $g(t)$ é $g^{-1}(t) = \frac{1}{y}t - \frac{x}{y}$:

$$g \circ g^{-1}(t) = y\left(\frac{1}{y}t - \frac{x}{y}\right) + x = t = e(t) \quad (16)$$

$$g^{-1} \circ g(t) = \frac{1}{y}(yt + x) - \frac{x}{y} = t = e(t) \quad (17)$$

(de modo equivalente, a identidade no grupo \mathcal{U} é $e = (0, 1)$ e a inversa de $g = (x, y)$ é $g^{-1} = \left(-\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right)$).

Temos ainda que

$$h \circ g^{-1}(t) = w \left(\frac{1}{y}t - \frac{x}{y} \right) + z = \left(\frac{w}{y} \right) t + \left(\frac{zy - wx}{y} \right) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \Downarrow \\ h.g^{-1} &= (z, w). \left(-\frac{x}{y}, \frac{1}{y} \right) = \left(\frac{zy - wx}{y}, \frac{w}{y} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

Uma vez que $y > 0$, a aplicação $h.g^{-1}$ é de classe C^∞ , pelo que G (e \mathcal{U}) é grupo de Lie.

b) Dada a forma bilinear não-degenerada no ponto e ,

$$\langle U, V \rangle_e = (dx \otimes dx + dy \otimes dy) (U, V) \quad (20)$$

podemos construir uma métrica invariante à esquerda mediante

$$\begin{aligned} \langle U, V \rangle_g &= \langle (L_{g^{-1}})_* U, (L_{g^{-1}})_* V \rangle_e \\ &= (dx \otimes dx + dy \otimes dy) ((L_{g^{-1}})_* U, (L_{g^{-1}})_* V) \end{aligned} \quad (21)$$

Como vimos na alínea anterior, as translacções esquerdas em $\mathcal{U} \simeq G$ por g^{-1} são definidas por

$$L_{g^{-1}}h = g^{-1} \circ h = \left(\frac{z-x}{y}, \frac{w}{y} \right) \quad (22)$$

Podemos então escrever, em coordenadas locais, o *push-forward* pela translacção esquerda:

$$(L_{g^{-1}})_* = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{y}I \quad (23)$$

e portanto,

$$(L_{g^{-1}})_* U = \frac{1}{y}U \quad (L_{g^{-1}})_* V = \frac{1}{y}V \quad (24)$$

Substituindo (24) na fórmula (21), temos finalmente

$$\begin{aligned} \langle U, V \rangle_g &= (dx \otimes dx + dy \otimes dy) \left(\frac{1}{y}U, \frac{1}{y}V \right) \\ &= dx \left(\frac{1}{y}U \right) . dx \left(\frac{1}{y}V \right) + dy \left(\frac{1}{y}U \right) . dy \left(\frac{1}{y}V \right) \\ &= \frac{1}{y^2} dx(U) . dx(V) + \frac{1}{y^2} dy(U) . dy(V) \\ &= \frac{1}{y^2} [dx \otimes dx + dy \otimes dy] (U, V) \end{aligned} \quad (25)$$

Portanto, a métrica invariante à esquerda que no ponto $(0, 1)$ é dada por $dx \otimes dx + dy \otimes dy$ é a métrica de Poincaré.

3.

a) Seja (Q, \langle, \rangle) uma variedade pseudo-Riemanniana, N uma variedade diferenciável e $f : N \rightarrow Q$ uma imersão, isto é, uma aplicação de classe C^∞ tal que $f_*(p)$ é injectiva, $\forall p \in N$. Define-se um campo tensorial de tipo $\binom{0}{2}$ em N mediante

$$\langle\langle U, V \rangle\rangle_p = \langle f_*U, f_*V \rangle_{f(p)} \quad \forall p \in N \quad (26)$$

Uma vez que \langle, \rangle é uma métrica em Q , este campo satisfaz a propriedade de simetria:

$$\langle\langle U, V \rangle\rangle_p = \langle f_*U, f_*V \rangle_{f(p)} = \langle f_*V, f_*U \rangle_{f(p)} = \langle\langle V, U \rangle\rangle_p \quad (27)$$

Se \langle, \rangle é uma métrica Riemanniana, então satisfaz

$$\langle X_q, X_q \rangle > 0 \quad \forall X_q (\neq 0) \in T_qQ \quad (28)$$

Mas sendo $f_*(p)$ é injectiva ($\text{Ker } f_* = 0$) temos

$$\begin{aligned} \langle\langle U, U \rangle\rangle_p &= \langle f_*U, f_*U \rangle_{f(p)} > 0 & \forall f_*U (\neq 0) \in T_{f(p)}Q \\ \langle\langle U, U \rangle\rangle_p &= 0 & \implies f_*U = 0 & \implies U = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

Portanto $\langle\langle, \rangle\rangle$ é definida positiva.

Provamos agora que se $\langle\langle, \rangle\rangle$ é definida positiva então é não-degenerada, ou equivalentemente, se $\langle\langle, \rangle\rangle$ é degenerada então não é definida positiva. A aplicação $\langle\langle, \rangle\rangle$ ser degenerada significa que existe (pelo menos) um vector diferente de zero, $U_p \in T_pN$, tal que

$$\langle\langle U_p, V_p \rangle\rangle = 0 \quad \forall V_p \in T_pN \quad (30)$$

Particularizando para $V_p = U_p$ obtemos $\langle\langle U_p, U_p \rangle\rangle = 0$ com $U_p \neq 0$. Logo $\langle\langle, \rangle\rangle$ não é definida positiva.

Portanto, a forma bilinear induzida em N é simétrica, não-degenerada e definida positiva, pelo que $(N, \langle\langle, \rangle\rangle)$ é uma variedade Riemanniana.

b) Consideremos a variedade pseudo-Riemanniana $(\mathbb{R}^2, \langle, \rangle)$ com a métrica de Minkowski:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = -dt \otimes dt + dx \otimes dx \quad (31)$$

Verifiquemos que \langle, \rangle é de facto uma métrica pseudo-Riemanniana:

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle &= (-dt \otimes dt + dx \otimes dx)(X, Y) = -dt(X).dt(Y) + dx(X).dx(Y) \\ &= -dt(Y).dt(X) + dx(Y).dx(X) = (-dt \otimes dt + dx \otimes dx)(Y, X) \\ &= \langle Y, X \rangle \quad \forall X, Y \in \chi(\mathbb{R}^2) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle &= -dt(X).dt(Y) + dx(X).dx(Y) = 0 \quad \forall Y \in \chi(\mathbb{R}^2) \\ &\begin{cases} \text{Para } Y = \frac{\partial}{\partial x} : & \implies dx(X) = 0 & \implies X^x = 0 \\ \text{Para } Y = \frac{\partial}{\partial t} : & \implies dt(X) = 0 & \implies X^t = 0 \end{cases} \\ \implies &X = X^t \frac{\partial}{\partial t} + X^x \frac{\partial}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Consideremos agora o conjunto $N = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t = x\} \subset \mathbb{R}^2$. Este conjunto é uma variedade diferenciável de dimensão 1, sendo (φ, \mathbb{R}) uma carta global com $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow N$ definida por

$$\varphi(x) = (x, x) \quad (34)$$

Seja então $f : N \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ a inclusão de N em \mathbb{R}^2 ,

$$f(t, x) = (t, x) \quad (35)$$

Uma vez que

$$D(f \circ \varphi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \text{Ker } D(f \circ \varphi) = 0 \quad (36)$$

concluimos que o *push-forward*, f_* , é uma aplicação injectiva. Por outro lado, a aplicação $f : N \rightarrow f(N)$ é simplesmente a aplicação identidade e portanto é trivialmente um homeomorfismo com a topologia induzida por \mathbb{R}^2 . Logo f é um mergulho e N é uma subvariedade mergulhada em \mathbb{R}^2 .

Neste caso, a forma bilinear induzida em N é degenerada:

$$\begin{aligned}
\langle\langle X, Y \rangle\rangle &= \langle f_*X, f_*Y \rangle = -dt(f_*X).dt(f_*Y) + dx(f_*X).dx(f_*Y) \\
&= -dt \left(X \frac{\partial}{\partial t} + X \frac{\partial}{\partial x} \right) . dt \left(Y \frac{\partial}{\partial t} + Y \frac{\partial}{\partial x} \right) + \\
&\quad + dx \left(X \frac{\partial}{\partial t} + X \frac{\partial}{\partial x} \right) . dx \left(Y \frac{\partial}{\partial t} + Y \frac{\partial}{\partial x} \right) \\
&= -XY + XY = 0 \qquad \forall X, Y \in \chi(N)
\end{aligned} \tag{37}$$

4.

Pretende-se definir uma conexão afim em \mathbb{R}^4 com coordenadas (t, x, y, z) cujas geodésicas sejam as soluções das equações de movimento de uma partícula em queda livre

$$\frac{d^2x^i}{dx^o} = -\frac{\partial\phi}{\partial x^i} \tag{38}$$

onde $x^0 = t$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Uma conexão afim é totalmente definida pelos símbolos de Christoffel através de

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k} = \Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{39}$$

pelo que basta dar os $4^3 = 64$ símbolos Γ_{jk}^i que definem a conexão afim.

A equação da geodésica escreve-se, em coordenadas locais, do seguinte modo:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2}(s) + \Gamma_{jk}^i(t(s), x(s), y(s), z(s)) \frac{dx^j}{ds}(s) \frac{dx^k}{ds}(s) = 0 \tag{40}$$

Uma vez que nas equações de movimento da partícula em queda livre surgem derivadas de segunda ordem em relação a t , o caminho natural a seguir é fazer com que t seja uma função linear do parâmetro s . Definimos então os seguintes símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{jk}^i = \begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial x^i} & \text{se } j = k = 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{41}$$

As quatro equações da geodésica são então

$$\begin{cases} \frac{d^2t}{ds^2} = 0 \\ \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = 0 \\ \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = 0 \\ \frac{d^2z}{ds^2} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = 0 \end{cases} \tag{42}$$

Da primeira equação, temos que $\frac{dt}{ds} = a$, sendo a uma constante. Substituindo este resultado nas outras três equações obtemos, como pretendido,

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + a^2 \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + a^2 \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + a^2 \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 \frac{d^2x}{dt^2} + a^2 \frac{\partial\phi}{\partial x} = 0 \\ a^2 \frac{d^2y}{dt^2} + a^2 \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \\ a^2 \frac{d^2z}{dt^2} + a^2 \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\partial\phi}{\partial z} \end{cases} \tag{43}$$

5. Seja V um espaço vectorial real de dimensão n e \langle, \rangle uma forma bilinear, simétrica, não-degenerada em V .

a) Pretende-se mostrar que $V_1 = V$ possui sempre uma base $\{E_1, \dots, E_n\}$ ortonormada em relação a \langle, \rangle .

Comecemos por notar que não pode acontecer serem todos os vectores de V nulos. Se assim fosse teríamos

$$\langle X, Y \rangle = \frac{\langle X + Y, X + Y \rangle - \langle X, X \rangle - \langle Y, Y \rangle}{2} = 0 \quad \forall X, Y \in V \quad (44)$$

contrariando a hipótese de \langle, \rangle ser não-degenerada.

Seja então E'_1 um vector não nulo de V . Obtemos um vector normado mediante

$$E_1 = \frac{E'_1}{\sqrt{|\langle E'_1, E'_1 \rangle|}} \quad (45)$$

Se $\dim V = 1$ o processo para obtenção de uma base ortonormal acaba aqui e a base é simplesmente $\{E_1\}$.

Estudemos agora o caso $\dim V \geq 2$. Considere-se agora o conjunto $V_2 = \{X \in V_1 : \langle E_1, X \rangle = 0\}$. Uma vez que \langle, \rangle é bilinear, temos

$$\begin{cases} X, Y \in V_2 & \implies X + Y \in V_2 \\ X \in V_2, a \in \mathbb{R} & \implies aX \in V_2 \end{cases} \quad (46)$$

e portanto V_2 é subespaço vectorial de V_1 . De facto, $V_2 = \text{Ker } \langle E_1, \cdot \rangle$, e atendendo a que a característica da aplicação linear $\langle E_1, \cdot \rangle$ é 1 (porque $E_1 \neq 0$) temos que

$$\dim V_2 = \text{nulidade} = \dim V_1 - \text{característica} = \dim V_1 - 1 \quad (47)$$

portanto $\dim V_2 \geq 1$ e existem vectores em V_2 para além do zero.

Mostremos que também não pode acontecer serem todos os vectores de V_2 nulos. Suponhamos que podiam ser todos nulos. Então, como anteriormente,

$$\langle X, Y \rangle = 0 \quad \forall X, Y \in V_2 \quad (48)$$

Seja $Z \in V$. Verifica-se facilmente que o vector $Z - \langle Z, E_1 \rangle E_1$ pertence a V_2 . Portanto, Z pode ser decomposto na soma de um vector pertencente a V_2 com um vector pertencente ao espaço gerado por E_1 , na seguinte forma:

$$Z = (Z - \langle Z, E_1 \rangle E_1) + \langle Z, E_1 \rangle E_1 \quad (49)$$

Então

$$\begin{aligned} \langle X, Z \rangle &= \langle X, Z - \langle Z, E_1 \rangle E_1 \rangle + \langle X, E_1 \rangle \langle Z, E_1 \rangle \\ &= 0 + 0 \langle Z, E_1 \rangle = 0 \quad \forall X \in V_2, Z \in V \end{aligned} \quad (50)$$

contrariando novamente a hipótese de \langle, \rangle ser não-degenerada. Seja então E'_2 um vector não nulo de V_2 . Obtemos outro vector normado através de

$$E_2 = \frac{E'_2}{\sqrt{|\langle E'_2, E'_2 \rangle|}} \quad (51)$$

Repetindo este processo n vezes (até que $\dim V_n = 1$), obtemos, por construção, um conjunto ortonormado de n vectores, $\{E_1, \dots, E_n\}$. Este conjunto é linearmente independente:

$$c_1 E_1 + \dots + c_n E_n = 0 \quad (52)$$

Suponha-se que $c_n \neq 0$. Então

$$E_n = -\frac{c_1 E_1 + \dots + c_{n-1} E_{n-1}}{c_n} \quad (53)$$

$$\langle E_n, E_i \rangle = 0 \implies c_i = 0 \quad \forall i \neq n \implies E_n = 0 \quad (54)$$

donde se conclui que tem que ser $c_n = 0$. Do mesmo modo se mostra que $c_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$, ficando provado que $\{E_1, \dots, E_n\}$ é linearmente independente. Sendo este conjunto constituído por $n = \dim V$ elementos, imediatamente concluímos que $\{E_1, \dots, E_n\}$ é uma base ortonormada em relação a \langle, \rangle .

- b) O método de ortogonalização de Gram-Schmidt baseia-se na escolha de uma qualquer base para V , $\{e_1, \dots, e_n\}$, e na aplicação do seguinte método iterativo, que consiste em retirar as projecções dos vectores determinados anteriormente:

$$E_1 = e_1 \quad (55)$$

$$E_i = e_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle e_i, E_k \rangle}{\langle E_k, E_k \rangle} E_k \quad (56)$$

Se \langle, \rangle não é definida positiva, o método de Gram-Schmidt em geral não funciona porque (dependendo da escolha inicial da base $\{e_1, \dots, e_n\}$) pode acontecer numa iteração obtermos um vector $E_k \neq 0$ tal que $\langle E_k, E_k \rangle = 0$ de modo a que não possa ser aplicada a fórmula de Gram-Schmidt.

6.

Seja Q uma variedade diferenciável de dimensão n e ∇ uma conexão afim em Q . Seja (x^1, \dots, x^n) um sistema de coordenadas locais. Nessas coordenadas temos

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \quad (57)$$

$$[X, Y] = \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_{X^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= X^i \left[\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right] \\ &= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \end{aligned} \quad (59)$$

donde

$$\begin{aligned} [X, Y] - \nabla_X Y + \nabla_Y X &= \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \\ &\quad - X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} - X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &\quad + Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^i X^j \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= Y^i X^j (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \frac{\partial}{\partial x^k} \end{aligned} \quad (60)$$

Por definição, ∇ é simétrica quando satisfaz

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \quad , \forall X, Y \in \chi(Q) \quad (61)$$

Logo, ∇ é simétrica sse em qualquer sistema de coodenadas locais se tem

$$\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k = 0 \quad \iff \quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \quad (i, j, k = 1, \dots, n) \quad (62)$$

7. Seja $(Q, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma variedade pseudo-Riemanniana, $c : I \rightarrow Q$ uma curva C^∞ e E a energia de c em $[a, b] \subset I$:

$$E_c = \int_a^b \frac{1}{2} \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle dt \quad (63)$$

Provemos que, se c é uma geodésica da conexão de Levi-Civita, então c é um ponto crítico da energia. Seja $\gamma : I \times]-1, 1[\rightarrow Q$ uma variação de c em $[a, b]$, $\gamma = \gamma(t, \alpha)$. Então, usando a compatibilidade da conexão (de Levi-Civita) com a métrica e a simetria da métrica,

$$\begin{aligned} \frac{dE_\gamma}{d\alpha} &= \int_a^b \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha} \langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle dt = \int_a^b \frac{1}{2} \left\{ \left\langle \frac{D\dot{\gamma}}{\partial \alpha}, \dot{\gamma} \right\rangle + \left\langle \dot{\gamma}, \frac{D\dot{\gamma}}{\partial \alpha} \right\rangle \right\} dt \\ &= \int_a^b \left\langle \frac{D\dot{\gamma}}{\partial \alpha}, \dot{\gamma} \right\rangle dt \end{aligned} \quad (64)$$

Antes de prosseguir, mostremos que tem lugar a igualdade $\frac{D\dot{\gamma}}{\partial \alpha} = \frac{D}{dt} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \right)$. Se $\gamma(t, \alpha) = y^i(t, \alpha) \frac{\partial}{\partial x^i}$,

$$\begin{aligned} \frac{D\dot{\gamma}}{\partial \alpha} &= \frac{D}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) = \frac{\partial y^i}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial x^i} + \dot{y}^i \frac{D}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial y^i}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial x^i} + \dot{y}^i \nabla_{\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\ &= \frac{\partial y^i}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial x^i} + \dot{y}^i \frac{\partial y^j}{\partial \alpha} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial y^i}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial x^i} + \dot{y}^i \frac{\partial y^j}{\partial \alpha} \Gamma_{ji}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= \frac{\partial^2 y^i}{\partial \alpha \partial t} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial y^i}{\partial t} \frac{\partial y^j}{\partial \alpha} \Gamma_{ji}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \end{aligned} \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial t} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \right) &= \frac{\partial^2 y^i}{\partial t \partial \alpha} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial y^i}{\partial \alpha} \frac{D}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial^2 y^i}{\partial t \partial \alpha} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial y^i}{\partial \alpha} \nabla_{\dot{\gamma}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \\ &= \frac{\partial^2 y^i}{\partial t \partial \alpha} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial y^i}{\partial \alpha} \frac{\partial y^j}{\partial t} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial^2 y^i}{\partial t \partial \alpha} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial y^i}{\partial \alpha} \frac{\partial y^j}{\partial t} \Gamma_{ji}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= \frac{\partial^2 y^i}{\partial \alpha \partial t} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial y^i}{\partial t} \frac{\partial y^j}{\partial \alpha} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{D\dot{\gamma}}{\partial \alpha} \end{aligned} \quad (66)$$

Na última igualdade usou-se a simetria da conexão de Levi-Civita, que é equivalente a $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Fazendo uso da identidade provada e da compatibilidade da conexão temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}, \dot{\gamma} \right\rangle &= \left\langle \frac{D}{\partial t} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \right), \dot{\gamma} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}, \frac{D\dot{\gamma}}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{D\dot{\gamma}}{\partial \alpha}, \dot{\gamma} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}, \frac{D\dot{\gamma}}{\partial t} \right\rangle \\ &\iff \left\langle \frac{D\dot{\gamma}}{\partial \alpha}, \dot{\gamma} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}, \dot{\gamma} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}, \frac{D\dot{\gamma}}{\partial t} \right\rangle \end{aligned} \quad (67)$$

Substituindo este resultado na expressão (64) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dE_\gamma}{d\alpha} &= \int_a^b \left\langle \frac{D\dot{\gamma}}{\partial \alpha}, \dot{\gamma} \right\rangle dt = \int_a^b \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}, \dot{\gamma} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}, \frac{D\dot{\gamma}}{\partial t} \right\rangle \right\} dt \\ &= \left[\left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}, \dot{\gamma} \right\rangle \right]_a^b - \int_a^b \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}, \frac{D\dot{\gamma}}{\partial t} \right\rangle dt \end{aligned} \quad (68)$$

Usando finalmente a hipótese de γ ser uma variação de c , e portanto $\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}(a) = \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}(b) = 0$, concluímos que, se c é uma geodésica $\left(\frac{D\dot{c}}{\partial t} \right)$, então é ponto crítico da energia:

$$\frac{dE_\gamma}{d\alpha}(0) = - \int_a^b \left\langle \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}(0), \frac{D\dot{c}}{\partial t} \right\rangle dt = 0 \quad (69)$$

Mostremos agora a implicação inversa, ou seja, que se c é ponto crítico da energia (ou equivalentemente, se c verifica as equações de Euler-Lagrange) então c é geodésica da conexão de Levi-Civita. A Lagrangeana à qual está associada a energia é neste caso

$$L = \frac{1}{2} \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = \frac{1}{2} \dot{x}^l \dot{x}^k \left\langle \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle \quad (70)$$

e temos por hipótese que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i} \ddot{x}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial \dot{x}^i} \dot{x}^j - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \quad (71)$$

Calculemos cada uma das parcelas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i} \ddot{x}^j &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^l \dot{x}^k \left\langle \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle \right) \right) \ddot{x}^j \\ &= \frac{\partial}{\partial \dot{x}^j} \left(\dot{x}^l \left\langle \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle \right) \ddot{x}^j = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle \ddot{x}^j \end{aligned} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial \dot{x}^i} \dot{x}^j &= \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^l \dot{x}^k \left\langle \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle \right) \right) \dot{x}^j \\ &= \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\dot{x}^l \left\langle \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle \right) \dot{x}^j = \frac{\partial}{\partial x^j} \left\langle \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle \dot{x}^j \dot{x}^l \\ &= \left\{ \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x^l}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle \right\} \dot{x}^j \dot{x}^l \\ &= \Gamma_{jl}^k \left\langle \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle \dot{x}^j \dot{x}^l + \Gamma_{ji}^k \left\langle \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle \dot{x}^j \dot{x}^l \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x^i} &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{1}{2} \dot{x}^l \dot{x}^k \left\langle \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle \right) = \frac{1}{2} \dot{x}^l \dot{x}^k \frac{\partial}{\partial x^i} \left\langle \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \dot{x}^l \dot{x}^k \left\{ \left\langle \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial x^l}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle \right\} \\ &= \frac{1}{2} \dot{x}^l \dot{x}^k \Gamma_{il}^j \left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle + \frac{1}{2} \dot{x}^l \dot{x}^k \Gamma_{ik}^j \left\langle \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle \\ &= \dot{x}^l \dot{x}^k \Gamma_{il}^j \left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k} \right\rangle \end{aligned} \quad (74)$$

Somando tudo (e trocando índices) notamos que $\frac{\partial L}{\partial x^i}$ anula o segundo termo de $\frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial \dot{x}^i} \dot{x}^j$ e obtém-se por fim

$$\begin{aligned} \ddot{x}^j \left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle + \Gamma_{jl}^k \dot{x}^j \dot{x}^l \left\langle \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle &= 0 \quad \Longleftrightarrow \\ \left\{ \ddot{x}^j + \Gamma_{kl}^j \dot{x}^k \dot{x}^l \right\} \left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i} \right\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (75)$$

$$\Longrightarrow \quad \ddot{x}^j + \Gamma_{kl}^j \dot{x}^k \dot{x}^l = 0 \quad (76)$$

Esta é a equação da geodésica em coordenadas locais. Logo c é geodésica da conexão de Levi-Civita.

8. Considere-se a métrica de Poincaré

$$ds^2 = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2) \quad (77)$$

no semiplano superior $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Pretende-se determinar todas as geodésicas desta métrica.

Seja $c : I \rightarrow Q$, com $c(t) = (x(t), y(t))$. O problema anterior garante que as geodésicas são os pontos críticos da energia, que se escreve, neste caso, utilizando a métrica:

$$\begin{aligned} E &= \int_a^b \frac{1}{2} \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle dt = \int_a^b \frac{1}{2} \frac{1}{y^2} (dx \otimes dx + dy \otimes dy) \left(\dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y}, \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} \right) dt = \\ &= \int_a^b \frac{1}{2} \frac{1}{y^2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) dt \end{aligned} \quad (78)$$

Portanto, c é um ponto crítico da acção correspondente ao Lagrangeano $L = \frac{1}{2} \frac{1}{y^2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ e conseqüentemente satisfaz as equações de Euler-Lagrange (as quais foram efectuadas na aula teórica):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 & \iff & \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{x}}{y^2} \right) = 0 & \iff & \ddot{x} - \frac{2}{y} \dot{x} \dot{y} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 & \iff & \ddot{y} + \frac{\dot{x}^2}{y} - \frac{\dot{y}^2}{y} = 0 \end{cases} \quad (79)$$

A primeira equação pode ser integrada, obtendo-se

$$\dot{x} = k y^2 \quad (80)$$

Substituindo esta expressão na segunda equação de Euler-Lagrange ficamos com uma equação diferencial em y :

$$\ddot{y} - \frac{\dot{y}^2}{y} + k^2 y^3 = 0 \quad (81)$$

Antes de mais, analisemos o caso $k = 0$. Temos então

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 & \implies & x(t) = c^{te} \\ \ddot{y} - \frac{\dot{y}^2}{y} = 0 & \implies & y(t) = c^{te} \cdot e^t \end{cases} \quad (82)$$

ou seja, as rectas verticais são geodésicas da métrica de Poincaré.

Consideremos agora o caso $k \neq 0$. Seja $\alpha(t)$ o ângulo definido pelos vectores $\dot{c}(t)$ e $\frac{\partial}{\partial x}$ (na métrica de Poincaré). Então

$$\cos \alpha(t) = \frac{\langle \dot{c}(t), \frac{\partial}{\partial x} \rangle}{\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle^{1/2} \langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \rangle^{1/2}} = \frac{\frac{1}{y^2} \dot{x}}{\frac{1}{y} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \frac{1}{y}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \quad (83)$$

Mostremos que $y^{-1} \cos \alpha$ é constante sobre uma geodésica. Escrevendo

$$\frac{\cos \alpha}{y} = \frac{1}{y} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \frac{\dot{x}}{y^2 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \quad (84)$$

e atendendo a que $\frac{\dot{x}}{y^2}$ é constante sobre uma geodésica (resultado obtido das equações de Euler-Lagrange) temos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\cos \alpha}{y} \right) = \frac{\dot{x}}{y^2} \frac{\dot{y} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} - \frac{y}{2} \frac{2\dot{x}\dot{x} + 2\dot{y}\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{\dot{x}}{y^2 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} [\dot{y} \dot{x}^2 + \dot{y}^3 - y \dot{x} \ddot{x} - y \dot{y} \ddot{y}] \quad (85)$$

Substituindo $\dot{x} = k y^2$ e $\ddot{x} = 2k y \dot{y}$, fazendo algumas simplificações (e notando que a expressão que surge entre parêntesis rectos é identicamente nula pela segunda equação de Euler-Lagrange) obtém-se finalmente

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\cos \alpha}{y} \right) = \frac{-\dot{x} \dot{y}}{y (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \left[\ddot{y} - \frac{\dot{y}^2}{y} + k^2 y^3 \right] = 0 \quad (86)$$

Portanto

$$\cos \alpha(t) = c^{te} \cdot y(t) = R \cdot y(t) \quad (87)$$

Usando este resultado,

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{1 - R^2 y^2}}{Ry} \quad (88)$$

Substituindo novamente $\dot{x} = ky^2$ ficamos com uma equação diferencial de primeira ordem para y :

$$\dot{y} = \frac{k}{R} y \sqrt{1 - R^2 y^2} \quad (89)$$

Pretendemos finalmente obter a solução para $y(t)$. Integrando a equação anterior, temos

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \int \frac{\dot{y}}{y \sqrt{1 - R^2 y^2}} dt &= \int \frac{k}{R} dt \quad \Leftrightarrow \int \frac{1}{y \sqrt{1 - R^2 y^2}} dy = \frac{k}{R} t + c^{te} \\ \Leftrightarrow \ln \left(\frac{y}{1 + \sqrt{1 - R^2 y^2}} \right) &= \frac{k}{R} t + c^{te} \quad \Leftrightarrow \frac{y}{1 + \sqrt{1 - R^2 y^2}} = \beta \cdot e^{\frac{k}{R} t} \\ \Leftrightarrow y(t) &= \frac{2\beta e^{\frac{k}{R} t}}{1 + \beta^2 R^2 e^{2\frac{k}{R} t}}, \quad \beta > 0 \end{aligned} \quad (90)$$

Podemos obter a solução para $x(t)$ integrando a expressão $\dot{x} = ky^2$. Obtém-se

$$x(t) = -\frac{2}{R \left(1 + \beta^2 R^2 e^{2\frac{k}{R} t} \right)} + C \quad (91)$$

Neste momento temos a parametrização das geodésicas. Para obter as trajectórias das geodésicas notamos que

$$\begin{aligned} \left[x(t) - \left(C - \frac{1}{R} \right) \right]^2 + [y(t)]^2 &= \left[\frac{1}{R} - \frac{2}{R \left(1 + \beta^2 R^2 e^{2\frac{k}{R} t} \right)} \right]^2 + \left[\frac{2\beta \cdot e^{\frac{k}{R} t}}{1 + \beta^2 R^2 e^{2\frac{k}{R} t}} \right]^2 \\ &= \frac{\left[\left(1 + \beta^2 R^2 e^{2\frac{k}{R} t} \right) - 2 \right]^2 + \left[2\beta R \cdot e^{\frac{k}{R} t} \right]^2}{R^2 \left(1 + \beta^2 R^2 e^{2\frac{k}{R} t} \right)^2} = \frac{1}{R^2} \end{aligned} \quad (92)$$

Logo as geodésicas que não são rectas verticais são circunferências de raio $\frac{1}{R}$ centradas nos pontos $(C - \frac{1}{R}, 0)$. Dito de outra maneira, as geodésicas da métrica de Poincaré são circunferências cujo centro se encontra sobre a recta $y = 0$ (possivelmente no infinito).

Já vimos o que representam as constantes de integração R e C As outras duas constantes de integração, k e β , não têm qualquer influência na trajectória (como ficou provado), apenas definem diferentes parametrizações das geodésicas.

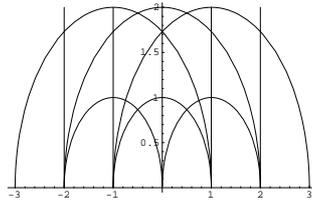


Figure 1: Geodésicas na métrica de Poincaré

Mostremos agora que por dois pontos distintos (a e b) do semi-plano de Poincaré Q passa uma e apenas uma geodésica. Se os dois pontos dados estiverem na mesma vertical, isto é, $a = (a_x, a_y)$ e $b = (b_x, b_y)$ com $a_x = b_x$, é óbvio que a única geodésica que contém a e b é a recta $x = a_x$ (com $y > 0$). Consideremos então que $a_x \neq b_x$. Sabemos que as geodésicas são circunferências com centro sobre a recta $y = 0$, portanto se existir geodésica que contenha a e b tem que satisfazer

$$\begin{aligned} (a_x - x)^2 + a_y^2 &= (b_x - x)^2 + b_y^2 \quad \Leftrightarrow \\ a_x^2 - 2a_x x + x^2 + a_y^2 &= b_x^2 - 2b_x x + x^2 + b_y^2 \quad \Leftrightarrow \\ (a_x^2 + a_y^2) - (b_x^2 + b_y^2) &= 2x(a_x - b_x) \end{aligned} \quad (93)$$

e portanto, $x = \frac{\|a\|^2 - \|b\|^2}{2(a_x - b_x)}$, ou seja, a geodésica tem que ter o centro em $\left(\frac{\|a\|^2 - \|b\|^2}{2(a_x - b_x)}, 0\right)$. Determinámos assim univocamente uma geodésica que passa por a e b .

Um exemplo de uma variedade Riemanniana que contém dois pontos pelos quais não passa nenhuma geodésica obtém-se facilmente das considerações anteriores: escolham-se quaisquer dois pontos distintos, a e b , do semi-plano de Poincaré. Provámos antes que existe uma única geodésica que os contém. Seja então p um ponto pertencente à geodésica e que se situe entre os dois pontos escolhidos. Então $(Q \setminus \{p\}, \langle, \rangle)$, onde \langle, \rangle é a restrição da métrica de Poincaré a $Q \setminus \{p\}$, é uma variedade Riemanniana tal que não existe nenhuma geodésica que passe por a e b .

Para construir um exemplo de uma variedade Riemanniana que contém dois pontos pelos quais passam infinitas geodésicas consideremos a variedade S^2 , a carta $\psi :]0, \pi[\times]0, 2\pi[\rightarrow S^2$ definida por

$$\psi(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \quad (94)$$

e a seguinte métrica em S^2 :

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad \iff \quad g(\cdot, \cdot) = d\theta \otimes d\theta + \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi \quad (95)$$

Então os símbolos de Christoffel são todos nulos excepto

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin \theta \cos \theta \quad \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (96)$$

e as equações da geodésica reduzem-se simplesmente a

$$\begin{cases} \ddot{\theta} - \sin \theta \cos \theta (\dot{\varphi})^2 = 0 \\ \ddot{\varphi} + 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \dot{\theta} \dot{\varphi} = 0 \end{cases} \quad (97)$$

Procuramos soluções que satisfaçam $\varphi = c^{te}$. Com esta condição a segunda equação é automaticamente verificada e a primeira equação escreve-se

$$\ddot{\theta} = 0 \quad \iff \quad \theta = at + \beta \quad (98)$$

Portanto rectas com $\varphi = c^{te}$ e $\theta = c^{te}$, em coordenadas da carta, são geodésicas. Estas curvas são exactamente os meridianos, círculos máximos que passam pelos dois pólos. Uma vez que existem infinitos meridianos (estão em bijecção com o intervalo $[0, 2\pi[$), construímos assim uma variedade Riemanniana com infinitas geodésicas que passam por dois pontos.

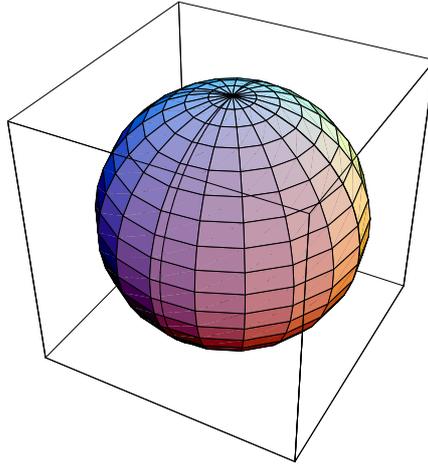


Figure 2: As geodésicas da esfera que passam pelos pólos são os meridianos

9. Seja (Q, \langle, \rangle) uma variedade pseudo-Riemanniana e $c : I \rightarrow Q$ uma curva de classe C^∞ . Considere-se a função $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$L(v_p) = |\langle v_p, v_p \rangle|^{1/2} \quad (99)$$

e a função Lagrangeana que se obtém por restrição ao fibrado dos vectores não-nulos, $L : TQ \setminus NQ \rightarrow \mathbb{R}$.

a) A hipótese de c ser uma geodésica é equivalente a $\frac{D\dot{c}}{dt} = 0$.

Basta mostrar que $L(\dot{c}(t))$ não depende do parâmetro t , para $\dot{c}(t) \in TQ \setminus NQ$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (L(\dot{c}(t))) &= \frac{d}{dt} |\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle|^{1/2} = \frac{1}{2} \frac{\frac{d}{dt} |\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle|}{|\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle|^{1/2}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\left| \frac{d}{dt} \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle \right|}{2 |\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle|^{1/2}} = \frac{|\langle \frac{D\dot{c}}{dt}, \dot{c} \rangle|}{|\langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle|^{1/2}} = 0 \\ \implies L(\dot{c}(t)) &= c^{te} \end{aligned} \quad (100)$$

Assim, concluímos que o levantamento de uma geodésica ou não intersecta o fibrado dos vectores nulos (se $L(\dot{c}(t)) \neq 0$) ou está contido nele (se $L(\dot{c}(t)) = 0$).

b) Seja c uma geodésica não nula, isto é, $\dot{c} \notin NQ$.

Então, usando como na alínea anterior que $\frac{d}{dt} \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} |\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle|^{1/2} \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} |\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle|^{1/2} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} |\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle|}{|\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle|^{1/2}} \right) - \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial}{\partial x^i} |\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle|}{|\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle|^{1/2}} \\ &= \frac{1}{2 |\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle|^{1/2}} \left\{ \frac{\partial^2 |\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle|}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i} \ddot{x}^j + \frac{\partial^2 |\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle|}{\partial x^j \partial \dot{x}^i} \dot{x}^j - \frac{\partial |\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle|}{\partial x^i} \right\} \end{aligned} \quad (101)$$

Como vimos no problema 7., a expressão contida entre parêntesis origina o primeiro membro da equação da geodésica e portanto c satisfaz as equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = \frac{1}{2 |\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle|^{1/2}} \left\{ \ddot{x}^j + \Gamma_{lk}^j \dot{x}^l \dot{x}^k \right\} = 0 \quad (102)$$

Logo c é um ponto crítico da acção associada ao Lagrangeano L ,

$$S = \int_a^b |\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle|^{1/2} dt \quad (103)$$

que é neste caso o comprimento de arco.

c) Como se viu anteriormente, se c é geodésica,

$$\frac{d}{dt} \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = 2 \left\langle \frac{D\dot{c}}{dt}, \dot{c} \right\rangle = 0 \quad (104)$$

Mais ainda, se c é uma geodésica não-nula, então $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = k \neq 0$. O comprimento de arco é dado por

$$\int_{t_0}^t |\langle \dot{c}(s), \dot{c}(s) \rangle|^{1/2} ds = \sqrt{|k|} (t - t_0) \quad (105)$$

e sendo $k \neq 0$, podemos inverter a relação e verificar que o parâmetro t da geodésica é uma função afim do comprimento de arco:

$$t = \frac{1}{\sqrt{|k|}} \int_{t_0}^t |\langle \dot{c}(s), \dot{c}(s) \rangle|^{1/2} ds + t_0 \quad (106)$$

d) Seja $t \rightarrow c(t)$ uma parametrização da curva c e $s \rightarrow s(t)$ uma mudança de parâmetro, portanto uma aplicação bijectiva e diferenciável, que preserve o sentido em que o caminho é percorrido, isto é, $\frac{ds}{dt} > 0$. A aplicação $t \rightarrow c \circ s(t)$ é uma reparametrização da curva c e pelo teorema da mudança de variável temos

$$\begin{aligned}
& \int_{s^{-1}(a)}^{s^{-1}(b)} \left| \left\langle \frac{d}{dt}(c \circ s)(t), \frac{d}{dt}(c \circ s)(t) \right\rangle \right|^{1/2} dt \\
&= \int_{s^{-1}(a)}^{s^{-1}(b)} \left| \left\langle \frac{dc}{ds}(s(t)) \frac{ds}{dt}(t), \frac{dc}{ds}(s(t)) \frac{ds}{dt}(t) \right\rangle \right|^{1/2} dt \\
&= \int_{s^{-1}(a)}^{s^{-1}(b)} \left| \left\langle \frac{dc}{ds}(s(t)), \frac{dc}{ds}(s(t)) \right\rangle \right|^{1/2} \left| \frac{ds}{dt} \right| dt \\
&= \int_a^b \left| \left\langle \frac{dc}{ds}, \frac{dc}{ds} \right\rangle \right|^{1/2} ds = \int_a^b |\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle|^{1/2} dt
\end{aligned} \tag{107}$$

ou seja, o comprimento de arco é invariante por mudança de parâmetro.

e) Seja $c(t)$ uma parametrização de uma curva cujo levantamento está contido em $TQ \setminus NQ$. A alínea anterior diz-nos que uma mudança de parâmetro não afecta o comprimento de arco.

Vejamus que é possível fazer uma mudança de parâmetro de modo a que a norma do levantamento seja constante, igual a 1. Considere-se uma mudança de parâmetro dada por $s(t)$. Pela regra da derivação composta temos então

$$\left\langle \frac{dc}{ds}, \frac{dc}{ds} \right\rangle = \left\langle \frac{dt}{ds} \dot{c}, \frac{dt}{ds} \dot{c} \right\rangle = \frac{\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} \tag{108}$$

Se escolhermos $s(t)$ de modo a que

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{|\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle|} \tag{109}$$

obtemos uma parametrização de c tal que $\left\langle \frac{dc}{ds}, \frac{dc}{ds} \right\rangle = 1$. (Uma vez que o levantamento está contido em $TQ \setminus NQ$, $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle$ nunca se anula e a equação diferencial acima tem solução diferenciável para todo o t).

Sabemos que ser ponto crítico é equivalente a satisfazer as equações de Euler-Lagrange e para estas podemos considerar como Lagrangeano a função integranda (no comprimento de arco) que se obtém depois da mudança de parâmetro. Assim, efectuando cálculos semelhantes aos da alínea b) mas considerando agora $\dot{c} = \frac{dc}{ds}$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} &= \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} |\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle|^{1/2} \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} |\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle|^{1/2} \\
&= \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{2} \frac{\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} |\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle|}{|\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle|^{1/2}} \right) - \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial}{\partial x^i} |\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle|}{|\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle|^{1/2}} \\
&= \frac{1}{2 |\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle|^{1/2}} \left\{ \frac{\partial^2 |\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle|}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i} \dot{x}^j + \frac{\partial^2 |\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle|}{\partial x^j \partial \dot{x}^i} \dot{x}^j - \frac{\partial |\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle|}{\partial x^i} \right\} \\
&= \frac{1}{2 |\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle|^{1/2}} \left\{ \ddot{x}^j + \Gamma_{lk}^j \dot{x}^l \dot{x}^k \right\} = 0 \\
\implies \ddot{x}^j + \Gamma_{lk}^j \dot{x}^l \dot{x}^k &= 0
\end{aligned} \tag{110}$$

ou seja, a reparametrização definida da curva c é uma geodésica.

f) Seja $\gamma(t, \alpha)$ uma qualquer variação da curva $c(t)$ em $TQ \setminus NQ$. Se o comprimento de c é \leq (ou \geq) que o comprimento de qualquer outra curva nas mesmas condições unindo os pontos $c(a)$ e $c(b)$ então o comprimento de $\gamma(t, 0)$ é \leq (ou \geq) que o comprimento $\gamma(t, \alpha)$, $\forall \alpha \in [-1, 1]$. Sendo, por definição de variação, γ uma aplicação de classe C^∞ , o comprimento de arco

$$l(\alpha) = \int_a^b |\langle \dot{\gamma}(t, \alpha), \dot{\gamma}(t, \alpha) \rangle|^{1/2} dt \tag{111}$$

é também de classe C^∞ . Portanto

$$\frac{dl}{d\alpha}(0) = 0 \quad (112)$$

ou seja, c é um ponto crítico do comprimento de arco. Se o levantamento de c está contido em $TQ \setminus NQ$ então, pela alínea anterior, podemos concluir que existe uma reparametrização da curva que é uma geodésica não-nula.

g) Considere-se \mathbb{R}^2 com a métrica euclideana $ds^2 = dx^2 + dy^2$ e a seguinte família de curvas seccionalmente regulares unindo $(0,0)$ a $(0,1)$:

$$c_R(t) = \begin{cases} Rt \frac{\partial}{\partial x} & \text{se } t \in [0, 1/4[\\ \frac{R}{4} \frac{\partial}{\partial x} + 2(t - \frac{1}{4}) \frac{\partial}{\partial y} & \text{se } t \in [1/4, 3/4[\\ R(1-t) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} & \text{se } t \in [3/4, 1] \end{cases} \quad (113)$$

O comprimento da curva c_R é dado por

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\langle \dot{c}_R, \dot{c}_R \rangle|^{1/2} dt &= \int_0^{1/4} |\langle \dot{c}_R, \dot{c}_R \rangle|^{1/2} dt + \int_{1/4}^{3/4} |\langle \dot{c}_R, \dot{c}_R \rangle|^{1/2} dt + \\ &\quad + \int_{3/4}^1 |\langle \dot{c}_R, \dot{c}_R \rangle|^{1/2} dt \\ &= \int_0^{1/4} |R| dt + \int_{1/4}^{3/4} 2 dt + \int_{3/4}^1 |R| dt = \frac{|R|}{2} + 1 \end{aligned} \quad (114)$$

Portanto podemos construir uma curva unindo $(0,0)$ a $(0,1)$ com comprimento de arco tão grande quanto se queira, logo não existe curva de comprimento máximo. (Se exigirmos que a curva seja de classe C^∞ , podemos "arredondar" os cantos das curvas c_R de modo que o novo comprimento de arco esteja tão próximo quanto se queira de $\frac{|R|}{2} + 1$)

h) Considere-se \mathbb{R}^2 com a métrica de Minkowski $ds^2 = -dt^2 + dx^2$. Verifiquemos primeiro que um caminho situado sobre o cone de luz tem comprimento nulo:

$$\begin{aligned} c(s) &= (As + B) \frac{\partial}{\partial t} + (As - C) \frac{\partial}{\partial x} \\ \implies \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle &= (-dt \otimes dt + dx \otimes dx) (\dot{c}, \dot{c}) = -A^2 + A^2 = 0 \\ \implies \int_a^b |\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle|^{1/2} ds &= 0 \end{aligned} \quad (115)$$

Portanto a curva

$$c(s) = \begin{cases} s \frac{\partial}{\partial t} + s \frac{\partial}{\partial x} & \text{se } s \in [0, 1/2[\\ s \frac{\partial}{\partial t} + (1-s) \frac{\partial}{\partial x} & \text{se } s \in [1/2, 1] \end{cases} \quad (116)$$

tem comprimento de arco nulo. No entanto, c não é uma curva de classe C^∞ . Podemos, contudo, "arredondar" o canto e obter uma curva regular cujo comprimento é tão pequeno quanto se queira. Para ficar provado que não existe uma curva regular que una $(0,0)$ a $(0,1)$ de comprimento mínimo, falta provar que nenhuma curva regular unindo $(0,0)$ a $(0,1)$ pode ter comprimento nulo. De facto, para ter comprimento nulo a curva tem que satisfazer $\langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = 0$, o que significa que a curva tem que se situar sobre o cone de luz. Mas para unir os pontos $(0,0)$ e $(0,1)$, é preciso percorrer duas diagonais o que implica que a curva não é regular. Fica assim provado o resultado pretendido.

10. Considere-se a esfera $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ e os planos $\pi_\infty = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : z = 0\}$ e $\pi_\alpha = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w = \alpha z, \alpha \in \mathbb{C}\}$. As intersecções $S^3 \cap \pi_\infty$ e $S^3 \cap \pi_\alpha$ são subconjuntos de \mathbb{C}^2 ($\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$) definidos por três condições reais independentes, pelo que as intersecções têm dimensão real 1, ou seja, são curvas.

Mostremos primeiro que as curvas que se obtêm por intersecção de S^3 com os planos não se intersectam entre si. Note-se que a intersecção de π_∞ com π_α é apenas o conjunto $\{(0, 0)\}$:

$$\pi_\infty \cap \pi_\alpha = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : z = 0 \wedge w = \alpha z, \alpha \in \mathbb{C}\} = \{(0, 0)\} \quad (117)$$

Portanto

$$(S^3 \cap \pi_\infty) \cap (S^3 \cap \pi_\alpha) = S^3 \cap (\pi_\infty \cap \pi_\alpha) = S^3 \cap \{(0, 0)\} = \emptyset \quad (118)$$

Do mesmo modo, se $\alpha_1 \neq \alpha_2$,

$$\pi_{\alpha_1} \cap \pi_{\alpha_2} = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : w = \alpha_1 z \wedge w = \alpha_2 z\} = \{(0, 0)\} \quad (119)$$

donde

$$(S^3 \cap \pi_{\alpha_1}) \cap (S^3 \cap \pi_{\alpha_2}) = S^3 \cap (\pi_{\alpha_1} \cap \pi_{\alpha_2}) = S^3 \cap \{(0, 0)\} = \emptyset \quad (120)$$

Concluimos assim que os paralelos de Clifford não se intersectam.

Mostremos agora que a intersecção $S^3 \cap \pi_\infty = c$ é uma geodésica de S^3 (com a métrica usual). Adoptemos coordenadas esféricas em S^3 :

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \sin \theta \sin \varphi \cos \xi \\ \operatorname{Im}(z) = \sin \theta \sin \varphi \sin \xi \\ \operatorname{Re}(w) = \sin \theta \cos \varphi \\ \operatorname{Im}(w) = \cos \theta \end{cases} \quad (121)$$

A métrica usual em S^3 escreve-se então

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi d\xi^2 \quad (122)$$

Uma parametrização para c é então a seguinte:

$$\begin{aligned} c(t) &= (\theta(t), \varphi(t), \xi(t)) = (t, 0, 0) \\ \implies \dot{c}(t) &= (1, 0, 0) \end{aligned} \quad (123)$$

Já vimos, no problema 7., que c é geodésica sse é ponto crítico da energia e isto equivale às equações de Euler-Lagrange para o Lagrangeano $\frac{1}{2} \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle$. Portanto, para c ser geodésica, basta verificar as equações de Euler-Lagrange:

$$L = \frac{1}{2} \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \dot{\xi}^2 \quad (124)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0 \\ \iff \ddot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 - \sin \theta \cos \theta \sin^2 \varphi \dot{\xi}^2 &= 0 \end{aligned} \quad (125)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0 \\ \iff 2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} + \sin^2 \theta \ddot{\varphi} - \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi \dot{\xi}^2 &= 0 \end{aligned} \quad (126)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \xi} &= 0 \\ \iff 2 \dot{\theta} \sin \theta \sin^2 \varphi \dot{\xi} + \sin^2 \theta 2 \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi \dot{\xi} + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \ddot{\xi} &= 0 \end{aligned} \quad (127)$$

De facto, $c(t) = (\theta(t), \varphi(t), \xi(t)) = (t, 0, 0)$ satisfaz trivialmente as três equações acima e portanto é uma geodésica de S^3 .

Naturalmente a esfera S^3 tem simetria esférica pelo que podemos escrever uma curva $S^3 \cap \pi_\alpha$ na forma $S^3 \cap \pi_\infty$ se utilizarmos uma mudança de coordenadas. Uma vez que já provámos que $S^3 \cap \pi_\infty$ é uma geodésica, fica provado que todas as curvas $S^3 \cap \pi_\alpha$ são geodésicas S^3 .