**Instituto Superior Técnico**
**Departamento de Matemática**
**Secção de Álgebra e Análise**

# ANÁLISE MATEMÁTICA IV

## FICHA 5 – SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES E EQUAÇÕES DE ORDEM SUPERIOR À PRIMEIRA

(1) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} .$$

(a) Quais são os valores próprios de $A$?
(b) Quais são os vectores próprios de $A$?
(c) Determine uma matriz de mudança de base, $S$, que diagonaliza $A$, e determine a sua inversa, $S^{-1}$.
(d) Calcule $e^{At}$.
(e) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} .$$

(f) Determine a solução geral da seguinte equação diferencial:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} .$$

(g) Escreva duas funções $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ que constituam uma base do espaço vectorial das soluções da equação da alínea anterior.

**Resolução:**

(a) *Os valores próprios são os zeros do polinómio característico:*

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 &\iff (3-\lambda)^2 - 4 = 0 \\ &\iff \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \\ &\iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 5 . \end{aligned}$$

*Os valores próprios de $A$ são 1 e 5.*

(b) *Os vectores próprios de $A$ associados ao valor próprio $1$ satisfazem*

$$(A - I)v = 0 \iff \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff a = -b .$$

*Logo, os vectores próprios de $A$ associados ao valor próprio $1$ são os vectores da forma*

$$v = a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad a \in \mathbb{R} .$$

*Os vectores próprios de $A$ associados ao valor próprio $5$ satisfazem*

$$(A - 5I)v = 0 \iff \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff a = b .$$

*Logo, os vectores próprios de $A$ associados ao valor próprio $5$ são os vectores da forma*

$$v = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad a \in \mathbb{R} .$$

(c) *Mudando para uma base de vectores próprios de $A$, a transformação linear dada por $A$ fica diagonal. Tome-se, por exemplo, a matriz de mudança de base*

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

*cujas primeira e segunda colunas são vectores próprios de $A$ associados aos valores próprios 1 e 5, respectivamente. A mudança inversa é*

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} .$$

*Então tem-se*

$$A = S \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} S^{-1} .$$

(d) *De acordo com a alínea anterior,*

$$e^{At} = S \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix} S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{e^t+e^{5t}}{2} & \frac{e^{5t}-e^t}{2} \\ \frac{e^{5t}-e^t}{2} & \frac{e^t+e^{5t}}{2} \end{bmatrix} .$$

(e) *A solução deste problema de valor inicial é*

$$y(t) = e^{At} \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e^t+e^{5t}}{2} & \frac{e^{5t}-e^t}{2} \\ \frac{e^{5t}-e^t}{2} & \frac{e^t+e^{5t}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3e^{5t}-e^t}{2} \\ \frac{3e^{5t}+e^t}{2} \end{bmatrix} , \ \forall t \in \mathbb{R} .$$

(f) *A solução geral desta equação diferencial é dada, por exemplo, pela expressão*

$$y(t) = S \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{5t} \\ c_2 e^{5t} - c_1 e^t \end{bmatrix} , \ \forall t \in \mathbb{R} \ \textit{ onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

**Comentário:** *A solução acima pode ser escrita*

$$y(t) = S \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix} S^{-1} S \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = e^{At} S \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} , \ \forall t \in \mathbb{R} \ \textit{ onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R} .$$

*Equivalentemente, poder-se-ia ter respondido que a solução geral é dada por*

$$y(t) = e^{At} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} , \ \forall t \in \mathbb{R} \ \textit{ onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

*As colunas de $e^{At}$ formam uma base das soluções da equação dada. Como $S$ é uma matriz invertível, as colunas de $e^{At}S$ também formam uma base das soluções da equação. Optou-se pela expressão $e^{At}S$ porque esta dá uma expressão mais simples para a solução geral.* ♢

(g) *Compõe-se uma base para o espaço vectorial das soluções da equação da alínea anterior, por exemplo, com as colunas da matriz*

$$S \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & e^{5t} \\ -e^t & e^{5t} \end{bmatrix} ,$$

*ou seja, com as funções $x_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ e $x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dadas por*

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ -e^t \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad x_2(t) = \begin{bmatrix} e^{5t} \\ e^{5t} \end{bmatrix} .$$

*De facto, $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são funções linearmente independentes, são soluções da equação da alínea anterior e qualquer outra solução $y(t)$ é da forma $y(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ para algum $c_1 \in \mathbb{R}$ e algum $c_2 \in \mathbb{R}$.*

□

(2) Para cada uma das matrizes $A$ seguintes, determine $e^{At}$.

(a)
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

(b)
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(c)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(d)
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

**Resolução:**

(a) *Esta matriz $A$ só tem um valor próprio:*

$$\begin{array}{rcl} \det(A - \lambda I) = 0 & \iff & (-\lambda)(-2-\lambda) + 1 = 0 \\ & \iff & \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \\ & \iff & \lambda = -1 \ . \end{array}$$

*Os vectores próprios são dados por*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \iff \quad -a = b \ .$$

*Escolhe-se o vector $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ para base do espaço próprio e procura-se um vector próprio generalizado, $w$, a associado a $v$:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \iff \quad c + d = 1 \ .$$

*Escolhe-se a solução $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Logo, uma decomposição de Jordan para $A$ é*

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}} .$$

*Conclui-se que*

$$\begin{array}{rcl} e^{At} & = & \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}}_{e^{Jt}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \\ & = & \begin{bmatrix} e^{-t} & (1+t)e^{-t} \\ -e^{-t} & -te^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ & = & \begin{bmatrix} (1+t)e^{-t} & te^{-t} \\ -te^{-t} & (1-t)e^{-t} \end{bmatrix} . \end{array}$$

**Comentário:** *Quando se detecta que esta matriz $2 \times 2$ tem apenas o valor próprio $-1$, pode-se concluir que a sua forma canónica de Jordan tem apenas um bloco. Com*

*efeito, se a forma canónica de Jordan $J$ tivesse dois blocos, seria a matriz diagonal $J = -I$, pelo que a própria matriz $A$ teria que ser*

$$A = SJS^{-1} = S(-I)S^{-1} = -SS^{-1} = -I \ ,$$

*o que é falso.* ♢

(b) *Nota-se que a matriz transposta $A^t$ é um bloco de Jordan. Como*

$$e^{A^t t} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(A^t t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(A^k t^k)^t}{k!} = \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \right)^t = \left(e^{At}\right)^t \ ,$$

*calcula-se*

$$e^{A^t t} = \begin{bmatrix} e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

*e conclui-se que*

$$e^{At} = \left(e^{A^t t}\right)^t = \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ te^{3t} & e^{3t} \end{bmatrix} \ .$$

(c) *Os valores próprios da matriz são as soluções da equação*

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (1-\lambda)(-1-\lambda)\lambda = 0$$

$$\iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -1 \text{ ou } \lambda = 0 \ .$$

*Os vectores próprios associados a $1$ são os vectores que verificam*

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff b = c = 0 \ .$$

*Escolhe-se o vector $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ para base do espaço próprio de $1$.*

*Os vectores próprios associados a $-1$ são os vectores que verificam*

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} a = b \\ c = 0 \ . \end{cases}$$

*Escolhe-se o vector $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ para base do espaço próprio de $-1$.*

*Os vectores próprios associados a $0$ são os vectores que verificam*

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = c \ . \end{cases}$$

*Escolhe-se o vector $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ para base do espaço próprio de $0$.*

*Assim, uma decomposição de Jordan para $A$ é*

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \ .$$

*Conclui-se que*

$$e^{At} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{e^{Jt}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}}$$

$$= \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} - e^t & e^t - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} & 1 - e^{-t} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

**Comentário:** *Ao encontrar 3 valores próprios diferentes para esta matriz $3 \times 3$, pode-se concluir logo que ela é diagonalizável, ou seja, que existe uma base formada por vectores próprios de $A$, pois valores próprios diferentes admitem vectores próprios linearmente independentes.* ♢

(d) *Os valores próprios da matriz são as soluções da equação*

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (2-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) + (3-\lambda) = 0$$

$$\iff \lambda = 3 \text{ ou } \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$\iff \lambda = 3 ,$$

*portanto $A$ tem apenas o valor próprio $3$.*
*Os vectores próprios são os vectores que verificam*

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A-3I} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff -a + b + c = 0 .$$

*Como há exactamente uma condição linear a que os vectores próprios têm obedecer, o espaço próprio tem dimensão $3 - 1 = 2$. Toma-se os vectores*

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

*para formar uma base do espaço próprio, tendo tido o cuidado de escolher o vector $v_2$ pertencente ao espaço das colunas da matriz $A - 3I$. Calcula-se agora um vector próprio generalizado $w$ associado a $v_2$:*

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A-3I} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} .$$

*Toma-se, por exemplo,* $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

*Consequentemente, uma decomposição de Jordan para $A$ é*

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}} .$$

*Conclui-se que*

$$\begin{aligned} e^{At} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}}_{e^{Jt}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \\ &= \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{3t} & te^{3t} \\ e^{3t} & 0 & e^{3t} \\ 0 & e^{3t} & te^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1-t)e^{3t} & te^{3t} & te^{3t} \\ 0 & e^{3t} & 0 \\ -te^{3t} & te^{3t} & (1+t)e^{3t} \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

□

(3) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} .$$

(a) Calcule $e^{At}$.

(b) Determine a solução do seguinte problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

**Resolução:**

(a) *Os valores próprios da matriz são as soluções de*

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 &\iff \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff (-1-\lambda)^2 + 1 = 0 \\ &\iff \lambda = -1 \pm i . \end{aligned}$$

*Os vectores próprios associados a $-1+i$ são os vectores que verificam*

$$\begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff ia = b .$$

*Uma base do espaço próprio de $-1+i$ é constituída pelo vector $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$.*

*Os vectores próprios associados a $-1-i$ são os vectores conjugados dos vectores próprios associados a $-1+i$. (De facto, se $\lambda$ e $\overline{\lambda}$ são valores próprios complexos conjugados de uma matriz real $A$, então $(A-\lambda I)v = 0 \iff (A-\overline{\lambda}I)\overline{v} = 0$.) Uma base do espaço próprio de $-1-i$ é constituída pelo vector $v_2 = \overline{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$.*

*Logo, uma decomposição de Jordan para $A$ é*

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} -1+i & 0 \\ 0 & -1-i \end{bmatrix}}_{J} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix}}_{S^{-1}} .$$

*Conclui-se que*

$$\begin{aligned} e^{At} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}}_{S} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{(-1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(-1-i)t} \end{bmatrix}}_{e^{Jt}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix}}_{S^{-1}} \\ &= e^{-t} \begin{bmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ ie^{it} & -ie^{-it} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{i}{2} \end{bmatrix} \\ &= e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

**Comentário:** *Apesar do método de resolução envolver complexos, a resposta tinha que ser real, pois a matriz dada é real e a exponencial de uma matriz real é real.* ♢

(b) *Em termos de*

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} , \qquad y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad b(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

*este problema de valor inicial escreve-se*

$$\begin{cases} \dot{y} = Ay + b(t) \\ y(0) = y_0 \ . \end{cases}$$

*A solução é dada, por exemplo, pela fórmula de variação das constantes:*

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{At}y_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}b(s)\,ds \\ &= 0 + \int_0^t e^{-(t-s)} \begin{bmatrix} \cos(t-s) & \sin(t-s) \\ -\sin(t-s) & \cos(t-s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-s} \\ 0 \end{bmatrix} ds \\ &= \int_0^t e^{-t} \begin{bmatrix} \cos(t-s) \\ -\sin(t-s) \end{bmatrix} ds \\ &= e^{-t} \begin{bmatrix} \int_0^t \cos(t-s)\,ds \\ -\int_0^t \sin(t-s)\,ds \end{bmatrix} \\ &= e^{-t} \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t - 1 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

*Conclui-se que a solução é*

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}\sin t \\ e^{-t}(\cos t - 1) \end{bmatrix} .$$

□

(4) Resolva o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} &= 2y_1 + 2y_2 + t \\ \frac{dy_2}{dt} &= 2y_1 + 2y_2 \ . \end{cases}$$

**Resolução:** *Este sistema fica mais simples se for traduzido nas incógnitas* $x_1 = y_1 - y_2$ *e* $x_2 = y_1 + y_2$*. Como*

$$\begin{cases} \dot{y_1} - \dot{y_2} &= t \\ \dot{y_1} + \dot{y_2} &= 4(y_1 + y_2) + t \ , \end{cases}$$

*as novas funções satisfazem*

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= t \\ \dot{x_2} &= 4x_2 + t \ . \end{cases}$$

*A solução geral da primeira equação é*

$$x_1(t) = \frac{t^2}{2} + c_1$$

*onde* $c_1$ *é uma constante real arbitrária. A segunda equação admite o factor de integração* $e^{-4t}$ *e resolve-se como se segue:*

$$\begin{aligned} \dot{x_2} = 4x_2 + t \quad &\iff \quad e^{-4t}\dot{x_2} - 4e^{-4t}x_2 = te^{-4t} \\ &\iff \quad \frac{d}{dt}\left(e^{-4t}x_2\right) = te^{-4t} \\ &\iff \quad e^{-4t}x_2 = \int te^{-4t}\,dt + c_2 \\ &\iff \quad x_2(t) = e^{4t}\left(-\frac{t}{4}e^{-4t} - \frac{1}{16}e^{-4t} + c_2\right) \\ &\iff \quad x_2(t) = -\frac{t}{4} - \frac{1}{16} + c_2e^{4t} \end{aligned}$$

*onde* $c_2$ *é uma constante real arbitrária. Como* $y_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ *e* $y_2 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$*, conclui-se que a solução geral pedida é*

$$\begin{cases} y_1(t) &= \frac{t^2}{4} + k_1 - \frac{t}{8} - \frac{1}{32} + k_2e^{4t} \\ y_2(t) &= -\frac{t}{8} - \frac{1}{32} + k_2e^{4t} - \frac{t^2}{4} - k_1 \ . \end{cases}$$

*onde* $k_1 = \frac{c_1}{2}$ *e* $k_2 = \frac{c_2}{2}$ *são constantes reais arbitrárias.* □

**Comentário:** *Em alternativa, poder-se-ia ter aplicado a fórmula de variação das constantes ao sistema original.* ♢

(5) Determine a solução geral de cada uma das seguintes equações diferenciais escalares:

(a) $y^{(2)} + 4\dot{y} + 4y = 0$;

(b) $y^{(2)} + 4\dot{y} + 4y = 1$;

(c) $y^{(2)} + 4\dot{y} + 4y = e^{-2t}$;

(d) $y^{(2)} + 4\dot{y} + 4y = 1 + e^{-2t}$.

**Resolução:**

(a) *Esta equação pode ser escrita*

$$(D^2+4D+4)y=0$$

*onde* $D=\frac{d}{dt}$ *é o operador de derivação em ordem a* $t$*. Como* $\lambda^2+4\lambda+4=(\lambda+2)^2$ *tem apenas a raiz* $-2$ *com multiplicidade 2, conclui-se que a solução geral é*

$$y(t)=c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}\ ,\quad \forall t\in\mathbb{R}\quad \textit{onde } c_1,c_2\in\mathbb{R}\ .$$

(b) *Esta equação pode ser escrita*

$$(D^2+4D+4)y=1\ . \qquad (\star)$$

*A sua solução geral pode ser obtida somando uma solução particular à solução geral da equação homogénea associada, a qual foi resolvida na alínea (a). Para encontrar uma solução particular, aplica-se o método dos coeficientes indeterminados. Um aniquilador de 1 é* $D$*. A equação homogénea auxiliar* $D(D^2+4D+4)y=0$ *tem solução geral* $a_1+a_2e^{-2t}+a_3te^{-2t}$*. Como a família* $a_2e^{-2t}+a_3te^{-2t}$ *é constituída exclusivamente por soluções da equação homogénea associada a* $(\star)$*, estes termos não adiantam na busca de uma solução particular de* $(\star)$*. Vai-se então determinar a constante* $a_1$*, substituindo-a na equação* $(\star)$ *e impondo que seja uma solução particular:*

$$(D^2+4D+4)a_1=1\iff 4a_1=1\iff a_1=\frac{1}{4}\ .$$

*Conclui-se que a solução geral é*

$$y(t)=c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}+\frac{1}{4}\ ,\quad \forall t\in\mathbb{R}\quad \textit{onde } c_1,c_2\in\mathbb{R}\ .$$

(c) *Esta equação pode ser escrita*

$$(D^2+4D+4)y=e^{-2t}\ . \qquad (\star\star)$$

*A sua solução geral pode ser obtida somando uma solução particular à solução geral da equação homogénea associada, a qual foi resolvida na alínea (a). Para encontrar uma solução particular, aplica-se o método dos coeficientes indeterminados. Um aniquilador de* $e^{-2t}$ *é* $D+2$*. A equação homogénea auxiliar* $(D+2)(D^2+4D+4)y=0$*, que é equivalente a* $(D+2)^3y=0$*, tem solução geral* $a_1e^{-2t}+a_2te^{-2t}+a_3t^2e^{-2t}$*. Como a família* $a_1e^{-2t}+a_2te^{-2t}$ *é constituída exclusivamente por soluções da equação homogénea associada a* $(\star\star)$*, estes termos não adiantam na busca de uma solução particular de* $(\star\star)$*. Vai-se então determinar a constante* $a_3$*, substituindo* $a_3t^2e^{-2t}$ *na equação* $(\star\star)$ *e impondo que seja uma solução particular:*

$$\begin{aligned}
&(D^2+4D+4)(a_3t^2e^{-2t})=e^{-2t}\\
\iff\quad &(4a_3t^2e^{-2t}-8a_3te^{-2t}+2a_3e^{-2t})+4(-2a_3t^2e^{-2t}+2a_3te^{-2t})+4a_3t^2e^{-2t}=e^{-2t}\\
\iff\quad &\begin{cases}4a_3-8a_3+4a_3=0\\ -8a_3+8a_3=0\\ 2a_3=1\end{cases}\qquad\iff\qquad a_3=\frac{1}{2}\ ,
\end{aligned}$$

*onde o sistema de equações para* $a_3$ *foi obtido igualando os coeficientes de* $t^2e^{-2t}$*,* $te^{-2t}$ *e* $e^{-2t}$ *nos membros esquerdo e direito. Conclui-se que a solução geral é*

$$y(t)=c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}+\frac{1}{2}t^2e^{-2t}\ ,\quad \forall t\in\mathbb{R}\quad \textit{onde } c_1,c_2\in\mathbb{R}\ .$$

(d) *Esta equação pode ser escrita*

$$(D^2+4D+4)y=1+e^{-2t}\ .$$

*A sua solução geral pode ser obtida somando uma solução particular à solução geral da equação homogénea associada, a qual foi resolvida na alínea (a). Encontra-se uma solução particular somando as soluções particulares determinadas nas alíneas (b) e (c), as quais correspondem a cada uma das parcelas do membro direito da equação. Conclui-se que a solução geral é*

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} t^2 e^{-2t} \ , \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{onde } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \ .$$

□

**Comentário:** *Em alternativa, na alínea $(d)$ poder-se-ia ter aplicado o método dos coeficientes indeterminados para calcular uma solução particular, notando que o aniquilador da soma $1 + e^{-2t}$ é a composição dos aniquiladores de $1$ e de $e^{-2t}$, ou seja, é $D(D+2)$.* ♢

(6) Determine a solução que verifica as condições iniciais $y(0) = \dot{y}(0) = 0$ e $y^{(2)}(0) = 1$ para as seguintes equações diferenciais escalares:

(a) $y^{(3)} - 4y^{(2)} + 5\dot{y} = e^t + t$;

(b) $y^{(3)} - 4y^{(2)} + 5\dot{y} = e^{2t} \cos t$.

**Resolução:**

(a) *A equação diferencial pode ser escrita*

$$(D^3 - 4D^2 + 5D)y = e^t + t \ . \qquad (\star)$$

*A sua solução geral pode ser obtida somando uma solução particular à solução geral da equação homogénea associada*

$$(D^3 - 4D^2 + 5D)y = 0 \ . \qquad (\star)_H$$

*Como $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda = \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 5)$ tem as raízes simples 0, $2+i$ e $2-i$, a solução geral complexa da equação homogénea associada $(\star)_H$ é*

$$a_1 + a_2 e^{(2+i)t} + a_3 e^{(2-i)t} \ , \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{onde } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C} \ .$$

*enquanto que a solução geral real de $(\star)_H$ é*

$$y_H(t) = c_1 + c_2 e^{2t} \cos t + c_3 e^{2t} \sin t \ , \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{onde } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \ .$$

*Para obter uma solução particular de $(\star)$, aplica-se o método dos coeficientes indeterminados. Um aniquilador de $e^t + t$ é $D^2(D-1)$, obtido compondo aniquiladores das parcelas $t$ e $e^t$. A equação homogénea auxiliar $D^2(D-1)(D^3 - 4D^2 + 5D)y = 0$, que é equivalente a $D^3(D-1)(D-2-i)(D-2+i)y = 0$, tem solução geral real $b_1 + b_2 t + b_3 t^2 + b_4 e^t + b_5 e^{2t} \cos t + b_6 e^{2t} \sin t$. Como a família $b_1 + b_5 e^{2t} \cos t + b_6 e^{2t} \sin t$ é constituída exclusivamente por soluções da equação homogénea associada $(\star)_H$, estes termos não adiantam na busca de uma solução particular de $(\star)$. Vai-se então determinar as constantes $b_2, b_3$ e $b_4$, substituindo $b_2 t + b_3 t^2 + b_4 e^t$ na equação $(\star)$ e impondo que seja uma solução particular:*

$$\begin{aligned}
& (D^3 - 4D^2 + 5D)(b_2 t + b_3 t^2 + b_4 e^t) = e^t + t \\
\iff \quad & b_4 e^t - 4(2b_3 + b_4 e^t) + 5(b_2 + 2b_3 t + b_4 e^t) = e^t + t \\
\iff \quad & \begin{cases} b_4 - 4b_4 + 5b_4 = 1 \\ 10 b_3 = 1 \\ -8b_3 + 5b_2 = 0 \end{cases} \qquad \iff \qquad \begin{cases} b_4 = \frac{1}{2} \\ b_3 = \frac{1}{10} \\ b_2 = \frac{4}{25} \end{cases}
\end{aligned}$$

*onde o sistema de equações para $b_2$, $b_3$ e $b_4$ foi obtido igualando os coeficientes de $e^t$, $t$ e $1$ nos membros esquerdo e direito. Logo, uma solução particular de $(\star)$ é*

$$y_P(t) = \frac{4}{25}t + \frac{1}{10}t^2 + \frac{1}{2}e^t \ , \quad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

*Conclui-se que a solução geral de $(\star)$ é*

$$y(t) = \underbrace{c_1 + c_2e^{2t}\cos t + c_3e^{2t}\sin t}_{y_H(t)} + \underbrace{\frac{4}{25}t + \frac{1}{10}t^2 + \frac{1}{2}e^t}_{y_P(t)} \ , \ \forall t \in \mathbb{R} \ \text{ onde } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \ .$$

*Para achar a solução particular que satisfaz as condições iniciais dadas, calcula-se a primeira e a segunda derivadas da solução geral:*

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= c_2e^{2t}(2\cos t - \sin t) + c_3e^{2t}(2\sin t + \cos t) + \frac{4}{25} + \frac{1}{5}t + \frac{1}{2}e^t \\ y^{(2)}(t) &= c_2e^{2t}(3\cos t - 4\sin t) + c_3e^{2t}(3\sin t + 4\cos t) + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}e^t \end{aligned}$$

*e impõe-se as condições:*

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 + \frac{1}{2} = 0 \\ \dot{y}(0) = 2c_2 + c_3 + \frac{4}{25} + \frac{1}{2} = 0 \\ y^{(2)}(0) = 3c_2 + 4c_3 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = \ \frac{22}{250} \\ c_2 = -\frac{147}{250} \\ c_3 = \ \frac{129}{250} \end{cases} .$$

*Portanto a resposta é*

$$y(t) = \frac{22}{250} - \frac{147}{250}e^{2t}\cos t + \frac{129}{250}e^{2t}\sin t + \frac{4}{25}t + \frac{1}{10}t^2 + \frac{1}{2}e^t \ , \ \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

(b) *A equação diferencial pode ser escrita*

$$(D^3 - 4D^2 + 5D)y = e^{2t}\cos t \ . \qquad (\star\star)$$

*A sua solução geral pode ser obtida somando uma solução particular à solução geral da equação homogénea associada*

$$(D^3 - 4D^2 + 5D)y = 0 \ ,$$

*cuja solução geral real foi obtida na alínea anterior:*

$$y_H(t) = c_1 + c_2e^{2t}\cos t + c_3e^{2t}\sin t \ , \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{onde } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \ .$$

*Para encontrar uma solução particular de $(\star\star)$, aplica-se o método dos coeficientes indeterminados. Um aniquilador de $e^{2t}\cos t$ é $(D-2)^2+1$. A equação homogénea auxiliar $[(D-2)^2+1](D^3-4D^2+5D)y = 0$, que é equivalente a $D(D-2-i)^2(D-2+i)^2y = 0$, tem solução geral real*

$$b_1 + b_2e^{2t}\cos t + b_3e^{2t}\sin t + b_4te^{2t}\cos t + b_5te^{2t}\sin t \ .$$

*Como a família $b_1 + b_2e^{2t}\cos t + b_3e^{2t}\sin t$ é constituída exclusivamente por soluções da equação homogénea associada, estes termos não adiantam na busca de uma solução particular de $(\star\star)$. Vai-se então determinar as constantes $b_4$ e $b_5$, substituindo $b_4te^{2t}\cos t + b_5te^{2t}\sin t$ na equação $(\star\star)$ e impondo que seja uma solução particular:*

$$\begin{aligned} & (D^3 - 4D^2 + 5D)(b_4te^{2t}\cos t + b_5te^{2t}\sin t) = e^{2t}\cos t \\ \iff \quad & (-2b_4 + 4b_5)\cdot e^{2t}\cos t + (-4b_4 - 2b_5)\cdot e^{2t}\sin t + 0\cdot te^{2t}\cos t + 0\cdot te^{2t}\sin t = e^{2t}\cos t \\ \iff \quad & \begin{cases} -2b_4 + 4b_5 = 1 \\ -4b_4 - 2b_5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b_4 = -\frac{1}{10} \\ b_5 = \frac{1}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

*onde o sistema de equações para $b_4$ e $b_5$ foi obtido igualando os coeficientes de $e^{2t}\cos t$ e $e^{2t}\sin t$ nos membros esquerdo e direito. Logo, uma solução particular de $(\star\star)$ é*

$$y_P(t) = -\frac{1}{10}te^{2t}\cos t + \frac{1}{5}te^{2t}\sin t \ , \quad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

*Conclui-se que a solução geral de $(\star\star)$ é*

$$y(t) = \underbrace{c_1 + c_2e^{2t}\cos t + c_3e^{2t}\sin t}_{y_H(t)} \underbrace{-\frac{1}{10}te^{2t}\cos t + \frac{1}{5}te^{2t}\sin t}_{y_P(t)} \ ,$$

*para todo o $t$ em $\mathbb{R}$ onde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.*
*Para achar a solução particular que satisfaz as condições iniciais dadas, calcula-se a primeira e a segunda derivadas da solução geral:*

$$\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= c_2e^{2t}(2\cos t - \sin t) + c_3e^{2t}(2\sin t + \cos t) \\
&\quad -\frac{1}{10}e^{2t}\cos t - \frac{1}{10}te^{2t}(2\cos t - \sin t) \\
&\quad +\frac{1}{5}e^{2t}\sin t + \frac{1}{5}te^{2t}(2\sin t + \cos t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y^{(2)}(t) &= c_2e^{2t}(3\cos t - 4\sin t) + c_3e^{2t}(3\sin t + 4\cos t) \\
&\quad -\frac{1}{10}e^{2t}(4\cos t - 2\sin t) - \frac{1}{10}te^{2t}(3\cos t - 4\sin t) \\
&\quad +\frac{1}{5}e^{2t}(4\sin t + 2\cos t) + \frac{1}{5}te^{2t}(3\sin t + 4\cos t)
\end{aligned}$$

*e impõe-se as condições:*

$$\begin{cases} y(0) &= c_1 + c_2 = 0 \\ \dot{y}(0) &= 2c_2 + c_3 - \frac{1}{10} = 0 \\ y^{(2)}(0) &= 3c_2 + 4c_3 - \frac{4}{10} + \frac{2}{5} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = \ \frac{3}{25} \\ c_2 = -\frac{3}{25} \\ c_3 = \ \frac{17}{50} \ . \end{cases}$$

*Portanto a resposta é*

$$y(t) = \frac{3}{25} - \frac{3}{25}e^{2t}\cos t + \frac{17}{50}e^{2t}\sin t - \frac{1}{10}te^{2t}\cos t + \frac{1}{5}te^{2t}\sin t \ , \ \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

□