Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IV

FICHA 3 – TEOREMA DOS RESÍDUOS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

(1) Seja f a função definida por

$$f(z) = \frac{1}{z^4+1} \; .$$

(a) Determine e classifique as singularidades de f.

(b) Utilize o teorema dos resíduos para calcular

$$\oint_{\gamma_R} \frac{1}{z^4+1}\, dz \; ,$$

onde γ_R é a fronteira do semicírculo

$$D_R = \{z \in \mathbb{C} \; : \; |z| \leq R, \; \operatorname{Im} z \geq 0\} \; ,$$

de raio $R > 1$ percorrida uma vez no sentido positivo.

(c) Mostre que

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^4+1}\, dz \right| \leq \frac{R\pi}{R^4-1} \; ,$$

onde Γ_R é a porção de γ_R correspondente à semicircunferência

$$\{z \in \mathbb{C} \; : \; |z| = R, \; \operatorname{Im} z \geq 0\} \; .$$

(d) Utilize os resultados das alíneas anteriores para calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\, dx \; .$$

Resolução:

(a) *As singularidades de f são os zeros de z^4+1:*

$$\begin{aligned}
z^4+1=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad z = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{e^{i\pi}} \\
&\Longleftrightarrow \quad z = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}} = \cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4} \; , \; k=0,1,2,3 \\
&\Longleftrightarrow \quad z = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \;\; \textit{ou} \;\; z = e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&\qquad\;\; \textit{ou} \;\; z = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \;\; \textit{ou} \;\; z = e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \; .
\end{aligned}$$

Cada uma destas quatro singularidades é um pólo simples porque o seguinte limite existe e é não nulo ($k=0,1,2,3$):

$$\lim_{z \to e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}} \left[(z - e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}) \frac{1}{z^4+1} \right] \;=\; \lim_{z \to e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}}} \frac{1}{4z^3} \;=\; \frac{1}{4} e^{-3i\frac{\pi+2k\pi}{4}}$$

onde na primeira igualdade se empregou a regra de Cauchy para resolver a indeterminação $\left(\frac{0}{0}\right)$.

(b) *Pelo teorema dos resíduos, o integral pedido é igual a $2\pi i$ vezes a soma dos resíduos nas singularidades de f situadas na região limitada pelo caminho. Os pólos*

$$z_1 \overset{\text{def}}{=} e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \text{e} \qquad z_2 \overset{\text{def}}{=} e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

são as únicas singularidades de f na região limitada pelo caminho γ_R. Usa-se a fórmula para o cálculo de resíduos em pólos simples e a regra de Cauchy para resolver a indeterminação:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{z_1} f &= \lim_{z\to z_1}\left[(z-z_1)\frac{1}{z^4+1}\right] \\
&= \lim_{z\to z_1}\frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4z_1^3} \\
&= \frac{1}{4}e^{i\frac{-3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{8} - i\frac{\sqrt{2}}{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{z_2} f &= \lim_{z\to z_2}\left[(z-z_2)\frac{1}{z^4+1}\right] \\
&= \lim_{z\to z_2}\frac{1}{4z^3} = \frac{1}{4z_2^3} \\
&= \frac{1}{4}e^{i\frac{-9\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{8} - i\frac{\sqrt{2}}{8} \ .
\end{aligned}$$

Conclui-se que

$$\oint_{\gamma_R} \frac{1}{z^4+1}\,dz = 2\pi i\left(\mathrm{Res}_{z_1} f + \mathrm{Res}_{z_2} f\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \ .$$

(c) *Tem-se a estimativa*

$$\left|\int_{\Gamma_R} f(z)\,dz\right| \le \int_{\Gamma_R} |f(z)|\,ds \le M_R \cdot L_R \ ,$$

onde M_R é um majorante do módulo da função integranda $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$ sobre o caminho Γ_R e $L_R = \pi R$ é o comprimento do caminho Γ_R (i.e., o comprimento duma semicircunferência de raio R). Para majorar $\frac{1}{|z^4+1|}$, minora-se o denominador. Pela desigualdade triangular, tem-se que

$$|z^4+1| \ge |z^4| - 1 \ .$$

Sobre Γ_R, tem-se $|z| = R$. Logo, como $R > 1$, tem-se

$$\left|\frac{1}{z^4+1}\right| = \frac{1}{|z^4+1|} \le \frac{1}{R^4-1} \ .$$

Tomando $M_R = \frac{1}{R^4-1}$, fica

$$\left|\int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^4+1}\,dz\right| \le \frac{\pi R}{R^4-1} \quad \text{para } R > 1 \ .$$

(d) *Os integrais de f sobre γ_R e sobre Γ_R estão relacionados por:*

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{z^4+1}\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^4+1}\,dx + \int_{\Gamma_R} \frac{1}{z^4+1}\,dz \ ,$$

onde o integral em dx representa um integral sobre um segmento do eixo real em $\mathbb{C}$. Pela alínea (b), o termo da esquerda é igual a $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ para qualquer $R > 1$. Pela *alínea (c), o segundo termo da direita tende para zero quando R tende para infinito. Portanto, fazendo $R \to +\infty$, obtém-se*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{x^4+1}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi \ .$$

□

(2) (a) Determine o desenvolvimento em série de Laurent na região $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ da função

$$g(z) = \left(z - z^3\right)\, e^{\frac{1}{z}} \ .$$

(b) Calcule o resíduo no ponto $z = 0$ da função

$$f(z) = \frac{1}{z-4} + \left(z - z^3\right)\, e^{\frac{1}{z}} \ .$$

(c) Calcule

$$\oint_\gamma \left(\frac{1}{z-4} + \left(z - z^3\right)\, e^{\frac{1}{z}}\right) dz \ ,$$

onde γ é a curva $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$ percorrida uma vez no sentido positivo.

(d) Quais são os possíveis valores do integral

$$\oint_C \left(\frac{1}{z-4} + \left(z - z^3\right)\, e^{\frac{1}{z}}\right) dz \ ,$$

onde C é uma curva fechada simples contida em $\mathbb{C} \setminus \{0, 4\}$?

Resolução:

(a) *A partir da série de Taylor da exponencial, deduz-se que o seguinte desenvolvimento é válido em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$:*

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{z^k} \ .$$

Logo, em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\left(z - z^3\right)\, e^{\frac{1}{z}} &= \left(z - z^3\right) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{z^k} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{z^{k-1}} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{z^{k-3}} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+1} \frac{1}{(1-k)!} z^k - \sum_{k=-\infty}^{+3} \frac{1}{(3-k)!} z^k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+3} a_k z^k \ ,
\end{aligned}$$

onde

$$a_k = \begin{cases} -1 & \text{se } k = 2 \text{ ou } 3 \\ \frac{1}{(1-k)!} - \frac{1}{(3-k)!} & \text{se } k \leq 1 \ . \end{cases}$$

Pela unicidade do desenvolvimento de uma função analítica numa coroa circular em série de potências positivas ou negativas (cf. teorema da série de Laurent), conclui-se *que o desenvolvimento em série de Laurent na região* $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ *da função* $g(z)$ *é*

$$\sum_{k=-\infty}^{+1} \frac{1}{(1-k)!} z^k - \sum_{k=-\infty}^{+3} \frac{1}{(3-k)!} z^k = \sum_{k=-\infty}^{+3} a_k z^k \ ,$$

onde os coeficientes a_k *estão definidos acima.*

(b) *O resíduo de* $f(z)$ *no ponto* $z=0$ *é o coeficiente* a_{-1} *da potência* $\frac{1}{z}$ *no desenvolvimento de* $f(z)$ *em série de Laurent em potências de* z *válido num disco furado,* $0<|z|<r$, *onde* $f(z)$ *é analítica.*[1] *Como a série de Laurent da soma* $\frac{1}{z-4}+\left(z-z^3\right)e^{\frac{1}{z}}$ *é a soma das séries de Laurent de* $\frac{1}{z-4}$ *e de* $\left(z-z^3\right)e^{\frac{1}{z}}$, *tem-se que*

$$\mathrm{Res}_0\left(\frac{1}{z-4}+\left(z-z^3\right)e^{\frac{1}{z}}\right) = \mathrm{Res}_0\frac{1}{z-4} + \mathrm{Res}_0\left(\left(z-z^3\right)e^{\frac{1}{z}}\right) \ .$$

Uma vez que $\frac{1}{z-4}$ *é analítica em* $z=0$, *a série de Laurent de* $\frac{1}{z-4}$ *em torno de* $z=0$ *é uma série de Taylor, pelo que só tem potências positivas e consequentemente*

$$\mathrm{Res}_0\frac{1}{z-4} = 0 \ .$$

O resíduo de $g(z) = \left(z-z^3\right)e^{\frac{1}{z}}$ *no ponto* $z=0$ *é o coeficiente da potência* $\frac{1}{z}$ *no desenvolvimento de* $g(z)$ *válido em* $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, *o qual foi calculado na alínea (a). Conclui-se que*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_0 f &= \mathrm{Res}_0\left(\left(z-z^3\right)\, e^{\frac{1}{z}}\right) \\
&= \frac{1}{(1-(-1))!} - \frac{1}{(3-(-1))!} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{24} \\
&= \frac{11}{24} \ .
\end{aligned}$$

(c) *O caminho* γ *é fechado simples, orientado positivamente e envolve apenas uma singularidade da função integranda* $f(z)$, *nomeadamente o ponto* $z=0$. *Pelo teorema dos resíduos , o integral pedido é*

$$\oint_\gamma \left(\frac{1}{z-4}+\left(z-z^3\right)\, e^{\frac{1}{z}}\right)\, dz \ = 2\pi i\, \mathrm{Res}_0 f = \pi i \frac{11}{12} \ .$$

(d) *Pelo teorema dos resíduos, cada integral*

$$\oint_C \left(\frac{1}{z-4}+\left(z-z^3\right)\, e^{\frac{1}{z}}\right)\, dz$$

é $2\pi i$ *vezes a soma dos resíduos nas singularidades envolvidas pelo caminho* C, *se o caminho for percorrido no sentido positivo, e é* $-2\pi i$ *vezes a soma dos resíduos nas singularidades envolvidas pelo caminho* C, *se o caminho for percorrido no sentido negativo.*

A função integranda $f(z)$ *tem apenas duas singularidades,* $z=0$ *e* $z=4$. *O ponto* $z=4$ *um pólo simples de* $f(z)$ *porque o limite*

$$\lim_{z\to 4}\left[(z-4)\left(\frac{1}{z-4}+\left(z-z^3\right)e^{\frac{1}{z}}\right)\right] = 1 \ .$$

existe e não é nulo. O resíduo de $f(z)$ *em* $z=4$, *é*

$$\mathrm{Res}_4 f = \lim_{z\to 4}\left[(z-4)\left(\frac{1}{z-4}+\left(z-z^3\right)e^{\frac{1}{z}}\right)\right] = 1 \ .$$

[1]Pode tomar-se $r\in]0,4[$ porque 4 é a distância de $z=0$ à singularidade mais próxima $z=4$.

Conclui-se que os possíveis valores do integral indicado são:

- $\frac{11}{24}$, *se C envolver apenas a singularidade $z = 0$ no sentido positivo,*
- $-\frac{11}{24}$, *se C envolver apenas a singularidade $z = 0$ no sentido negativo,*
- 1, *se C envolver apenas a singularidade $z = 4$ no sentido positivo,*
- -1, *se C envolver apenas a singularidade $z = 4$ no sentido negativo,*
- $\frac{35}{24}$, *se C envolver ambas as singularidades $z = 0$ e $z = 4$ no sentido positivo,*
- $-\frac{35}{24}$, *se C envolver ambas as singularidades $z = 0$ e $z = 4$ no sentido negativo,* *ou*
- 0, *se C não envolver nenhuma das singularidades.*

$\square$

Comentário: *Tratando-se C de um caminho simples (i.e., que não se auto-intersecta), não é possível que dê mais do que uma volta a cada singularidade.* $\diamondsuit$

Nas respostas aos exercícios seguintes,
indique o intervalo de definição das soluções que apresenta
e inclua uma verificação dessas soluções.

(3) Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:

(a) $\frac{dy}{dt} = \frac{t}{t^2+1}$;

(b) $\frac{dy}{dt} = t \sin t + \frac{1}{t^2-1}$.

Resolução:

(a) *Resolve-se por primitivação:*

$$\begin{aligned} & \frac{dy}{dt} = \frac{t}{t^2+1} \\ \iff \quad & y(t) = \int \frac{t}{t^2+1}\, dt + c \\ \iff \quad & y(t) = \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + c = \ln\sqrt{t^2+1} + c \ , \end{aligned}$$

onde c representa uma constante real arbitrária.
Solução geral:

$$y(t) = \ln\sqrt{t^2+1} + c \ , \qquad \text{com } c \in \mathbb{R} \ .$$

Intervalo de definição: $\mathbb{R}$.
Verificação:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(\ln\sqrt{t^2+1} + c) = \frac{\frac{2t}{2\sqrt{t^2+1}}}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{t}{t^2+1} \qquad \text{– ok!}$$

(b) *A função $\frac{1}{t^2-1}$ está definida em $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$. Em qualquer intervalo contido em $\mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$, a equação dada resolve-se por primitivação:*

$$\frac{dy}{dt} = t\sin t + \frac{1}{t^2-1} \quad \iff \quad y(t) = \int t \sin t\, dt + \int \frac{1}{t^2-1}\, dt + c \ ,$$

onde c representa uma constante real arbitrária. Uma primitiva de $t\sin t$ encontra-se primitivando por partes[2]*:*

$$\int t\sin t\,dt = -t\cos t - \int(-\cos t)\,dt = \sin t - t\cos t\ .$$

Recorrendo a decomposição em fracções simples,

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\ ,$$

determina-se uma primitiva de $\frac{1}{t^2-1}$:

$$\frac{1}{2}\left(\ln|t-1| - \ln|t+1|\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{|t-1|}{|t+1|} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\ .$$

Conclui-se que, para $t \in]-\infty,-1[$, $t\in]-1,1[$ ou $t\in]1,+\infty[$,

$$\frac{dy}{dt} = t\sin t + \frac{1}{t^2-1} \iff y(t) = \sin t - t\cos t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c\ ,$$

onde c representa uma constante real arbitrária.

Solução geral:

$$y(t) = \sin t - t\cos t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c\ , \qquad \text{com } c\in\mathbb{R}\ .$$

Intervalo de definição: $]-\infty,-1[$ *ou* $]-1,1[$ *ou* $]1,\infty[$.

Verificação:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\sin t - t\cos t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c\right) \\
&= \cos t - \cos t + t\sin t + \frac{1}{2}\frac{\frac{d}{dt}\frac{t-1}{t+1}}{\frac{t-1}{t+1}} \\
&= t\sin t + \frac{1}{2}\frac{\frac{t+1-t+1}{(t+1)^2}}{\frac{t-1}{t+1}} \\
&= t\sin t + \frac{1}{(t-1)(t+1)} \qquad \text{– ok!}
\end{aligned}$$

□

Comentário: *A equação dada em (b) tem três famílias infinitas de soluções, cada família parametrizada por $c\in\mathbb{R}$. As três famílias correspondem aos três possíveis intervalos de definição:* $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ *e* $]1,\infty[$. ♢

(4) Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:

(a) $\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t^2}y = 0$;

(b) $\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t-3}y = \sin t$.

---

[2]Recordar que $\int uv' = uv - \int u'v$, devido à regra de derivação para um produto.

Resolução:

(a) *Esta equação só faz sentido para $t \neq 0$.*
Na vizinhança de um instante onde $y \neq 0$, a equação dada pode ser resolvida pelo método de separação de variáveis:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t^2}y = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\dot{y}}{y} = -\frac{1}{t^2} \\
&\Longleftrightarrow \quad \int \frac{\dot{y}}{y}\, dt = -\int \frac{1}{t^2}\, dt + c \ , \quad \textit{onde } c \in \mathbb{R} \\
&\Longleftrightarrow \quad \int \frac{1}{y}\, dy = \frac{1}{t} + c \\
&\Longleftrightarrow \quad \ln |y| = \frac{1}{t} + c \\
&\Longleftrightarrow \quad |y(t)| = e^c e^{\frac{1}{t}} \\
&\Longleftrightarrow \quad y(t) = ke^{\frac{1}{t}} \ , \qquad \textit{onde } k \neq 0 \ .
\end{aligned}$$

Nota-se que, se uma solução $y(t)$ não se anula num instante t_0, então $y(t)$ também não se anula em qualquer outro instante t onde esteja definida – reparar na expressão de $y(t)$ como produto de uma constante não nula pela exponencial que nunca se anula. Deduz-se que, se uma solução $y(t)$ se anula num instante t_0, então $y(t)$ terá que ser a função identicamente nula, a qual é de facto solução como se pode verificar substituindo na equação. A solução identicamente nula pode ser escrita na forma $ke^{\frac{1}{t}}$ escolhendo $k = 0$.

Solução geral:

$$y(t) = ke^{\frac{1}{t}} \qquad \textit{com } k \in \mathbb{R} \ .$$

Intervalo de definição: $]-\infty, 0[$ *ou* $]0, +\infty[$.

Verificação:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}ke^{\frac{1}{t}} = -k\frac{1}{t^2}e^{\frac{1}{t}} \\
\frac{1}{t^2}y &= \frac{1}{t^2}ke^{\frac{1}{t}} \\
\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t^2}y &= 0 \qquad \textit{– ok!}
\end{aligned}$$

Comentário: *Esta equação é linear homogénea. Podia ter sido resolvida aplicando a fórmula geral para a solução dessas equações.* $\diamondsuit$

(b) *Esta equação é linear. Aplicando a fórmula geral para a solução de equações deste tipo, obtém-se*

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t-3}y = \sin t \\
\Longleftrightarrow \quad & y(t) = e^{-\int \frac{1}{t-3}\, dt}\left(k + \int e^{\int \frac{1}{t-3}\, dt} \sin t\, dt\right) \ , \quad \textit{onde } k \in \mathbb{R} \ .
\end{aligned}$$

Se se escolher $\int \frac{1}{t-3}\, dt = \ln |t-3|$, fica

$$e^{-\int \frac{1}{t-3}\, dt} = \frac{1}{|t-3|}$$

e

$$\begin{aligned}
\int e^{\int \frac{1}{t-3}\, dt} \sin t\, dt &= \int |t-3| \sin t\, dt \\
&= \frac{|t-3|}{t-3} \sin t - |t-3| \cos t \ ,
\end{aligned}$$

onde se primitivou por partes, para os casos $t-3>0$ *e* $t-3<0$.
Solução geral:

$$y(t) = \frac{c+\sin t}{t-3} - \cos t \qquad \text{com } c \in \mathbb{R} \ .$$

Intervalo de definição: $]-\infty, 3[$ *ou* $]3, +\infty[$.
Verificação:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{c+\sin t}{t-3} - \cos t\right) \\
&= \frac{(t-3)\cos t - c - \sin t}{(t-3)^2} + \sin t \\
\frac{1}{t-3}y &= \frac{1}{t-3}\left(\frac{c+\sin t}{t-3} - \cos t\right) \\
&= \frac{c+\sin t - (t-3)\cos t}{(t-3)^2} \\
\frac{dy}{dt} + \frac{1}{t-3}y &= \sin t \qquad \text{– ok!}
\end{aligned}$$

Comentário: *Em alternativa, para* $t \neq 3$ *poder-se-ia ter multiplicado a equação por* $t-3$ *e primitivado:*

$$\begin{aligned}
& (t-3)\frac{dy}{dt} + y = (t-3)\sin t \\
\Longleftrightarrow \quad & \frac{d}{dt}\left[(t-3)y(t)\right] = (t-3)\sin t \\
\Longleftrightarrow \quad & (t-3)y(t) = \int \left[(t-3)\sin t\right]\, dt + c \\
\Longleftrightarrow \quad & y(t) = \frac{1}{t-3}\left[\sin t - (t-3)\cos t + c\right] \\
\Longleftrightarrow \quad & y(t) = \frac{\sin t}{t-3} - \cos t + \frac{c}{t-3} \ .
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

$\square$

(5) Determine a solução dos seguintes problemas de valor inicial:

(a) $\frac{dy}{dt} + ty = t \ , \qquad y(0) = 1;$

(b) $\frac{dy}{dt} + y = \cosh t \ , \qquad y(0) = 1.$

Resolução:

(a) *A EDO deste problema de valor inicial é uma equação linear. A solução será uma função dada, por exemplo, pela fórmula para a solução do PVI para equações lineares; em particular, essa solução é única. Ora observa-se que a função identicamente igual a 1 é solução deste PVI. Logo, essa é* a *solução.*
Solução: $y(t) = 1$.
Intervalo de definição: $\mathbb{R}$.
Verificação: A condição inicial é satisfeita

$$y(0) = 1$$

e a equação diferencial também:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= 0 \\ ty(t) &= t \\ \frac{dy}{dt} + ty(t) &= t \qquad \textit{– ok!} \end{aligned}$$

Comentário: *Se não se tivesse reparado logo que a função constante igual a 1 resolvia o problema dado, a mesma solução seria encontrada por qualquer dos métodos que se podem aplicar a equações lineares.* $\diamondsuit$

(b) *A EDO deste problema de valor inicial é linear. Aplicando a fórmula para a solução de um problema de valor inicial envolvendo uma equação linear, obtém-se a seguinte expressão para a solução:*

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-\int_0^t 1\,ds}\left(1 + \int_0^t e^{\int_0^s 1\,du}\cosh s\,ds\right) \\ &= e^{-t}\left(1 + \int_0^t e^s \cdot \frac{e^s + e^{-s}}{2}\,ds\right) \\ &= e^{-t}\left(1 + \int_0^t \frac{e^{2s}+1}{2}\,ds\right) \\ &= e^{-t}\left(1 + \frac{e^{2t}-1}{4} + \frac{t}{2}\right) \\ &= e^{-t} + \frac{e^t - e^{-t}}{4} + \frac{te^{-t}}{2} \\ &= \frac{e^t}{4} + \frac{3e^{-t}}{4} + \frac{te^{-t}}{2}\ . \end{aligned}$$

Solução: $y(t) = \frac{e^t}{4} + \frac{3e^{-t}}{4} + \frac{te^{-t}}{2}$.
Intervalo de definição: $\mathbb{R}$.
Verificação: A condição inicial é satisfeita

$$y(0) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 0 = 1$$

e a equação diferencial também:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{e^t}{4} - \frac{3e^{-t}}{4} + \frac{e^{-t}}{2} - \frac{te^{-t}}{2} \\ y(t) &= \frac{e^t}{4} + \frac{3e^{-t}}{4} + \frac{te^{-t}}{2} \\ \frac{dy}{dt} + y(t) &= \frac{e^t}{2} + \frac{e^{-t}}{2} \\ &= \cosh t \qquad \textit{– ok!} \end{aligned}$$

Comentário: *Equivalentemente, poder-se-ia ter primeiro resolvido a EDO pelo método do factor de integração ou por aplicação da fórmula geral para a solução da equação linear, e depois fixado a constante de integração de maneira a satisfazer a condição inicial.* $\diamondsuit$

$\square$

(6) Em $t = 0$ vivem 100 coelhos numa floresta. Sabendo que a taxa de natalidade dos coelhos é de 2 por cento por dia, e que, em média, 1 coelho é esmagado pela queda de uma árvore por dia, indique a população aproximada de coelhos ao fim de dez semanas, isto é, para $t = 70$.

Resolução: *Seja $y(t)$ uma aproximação diferenciável do número de coelhos no dia t para $t \geq 0$. Se não houvesse mortes, a população de coelhos cresceria exponencialmente de acordo com a lei $\frac{dy}{dt} = 0.02y(t)$. Como também morre 1 coelho por dia, a equação diferencial que serve de modelo para a evolução da população de coelhos é*

$$\frac{dy}{dt} = 0.02y(t) - 1$$

para $t \geq 0$. Como no dia inicial vivem 100 coelhos, tem-se $y(0) = 100$. Assim, vai-se primeiro procurar a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 0.02y(t) - 1 \\ y(0) = 100 \ . \end{cases}$$

A equação diferencial envolvida neste problema de valor inicial é linear. Multiplicando-a pelo factor de integração $e^{-0.02t}$, obtém-se

$$\begin{aligned} & e^{-0.02t}\frac{dy}{dt} - 0.02e^{-0.02t}y(t) = -e^{-0.02t} \\ \iff \quad & \frac{d}{dt}\left(e^{-0.02t}y(t)\right) = -e^{-0.02t} \\ \iff \quad & e^{-0.02t}y(t) = -\int e^{-0.02t}\,dt + c \ , \qquad\qquad \textit{onde } c \in \mathbb{R} \\ \iff \quad & y(t) = e^{0.02t}(c + 50e^{-0.02t}) \\ \iff \quad & y(t) = ce^{0.02t} + 50 \ . \end{aligned}$$

A condição inicial impõe que

$$100 = ce^0 + 50 \quad \Longrightarrow \quad c = 50 \ .$$

Logo, a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = 50e^{0.02t} + 50 \ .$$

Para $t = 70$, tem-se

$$y(70) = 50e^{1.4} + 50 \simeq 252.78 \ .$$

Conclui-se que, ao fim de dez semanas, a população aproximada de coelhos é 253.
Verificação do PVI: A condição inicial é satisfeita

$$y(0) = 50 + 50 = 100$$

e a equação diferencial também:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} \quad &= \quad e^{0.02t} \\ 0.02y - 1 \quad &= \quad e^{0.02t} + 1 - 1 \ = \ e^{0.02t} \ = \ \frac{dy}{dt} \qquad \textit{– ok!} \end{aligned}$$

□