Análise Matemática I

1º Exame (Grupos I, II, III, IV, V e VI)
2º Teste (Grupos IV, V e VI)

Campus da Alameda **15 de Janeiro de 2003**

LEEC, LCI, LEGI, LQ, LEQ, LEB, LEAmb

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

---

1 Enunciado

I. Considere dois subconjuntos de $\mathbb{R}$, A e B, em que:

$$A = \left\{ \operatorname{sen} x : x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3} \right] \right\}$$

e B é o conjunto dos termos da sucessão das somas parciais da série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$. Isto é, B é o conjunto dos termos da sucessão $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

a) Escreva o conjunto A na forma de um intervalo ou reunião de intervalos.

b) Determine, se existirem, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo dos conjuntos $A \setminus \mathbb{Q}$ e B.

c) Decida se as seguintes proposições são verdadeiras ou falsas, justificando apropriadamente (demonstre ou dê um exemplo, conforme adequado).

   i) Qualquer sucessão de termos no intervalo $[0, 1[$, convergente, tende para um número real pertencente a esse intervalo.

   ii) Se (y_n) é uma sucessão de termos reais, então a sucessão $(\operatorname{arctg}(y_n))$ possui pelo menos uma subsucessão convergente.

   iii) Se uma sucessão de termos em B é convergente então existe uma ordem a partir da qual todos os termos são iguais.

II. 1. Estude a natureza (convergência simples, absoluta ou divergência) das seguintes séries e calcule a soma de uma delas:

$$\text{a)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 + 5n - 1}{n^4 - n \operatorname{sen} n} \qquad \text{b)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\, n \qquad \text{c)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log\left(\frac{n+2}{n}\right)}{\log(n) \log(n+2)} \qquad \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, e^{-n^2}$$

2. Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a seguinte série de potências converge absolutamente, simplesmente ou diverge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(1/n)(3x-1)^n.$$

III. Considere sucessões $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que a série $\sum(b_n - b_{n+1})$ converge e a série $\sum a_n$ converge absolutamente. Mostre que a série $\sum a_n b_n$ converge absolutamente.

O 2º Teste começa aqui.

IV. Considere duas funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciáveis em $\mathbb{R}$ e uma função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = f(\operatorname{arctg}(g(x))).$$

a) Justifique que h é diferenciável em $\mathbb{R}$ e determine $h'(x)$.

b) Sabendo que $f'(y) < 0$ para $y \in \left]-2, 2\right[$ e $g'(x) < 0$ para $x \in \mathbb{R}$ mostre que h é crescente em $\mathbb{R}$.

V. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\, x\, e^{|x-1|}, & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + 3x + 2\log(1-x), & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

em que α é uma constante real.

a) Determine α sabendo que f tem derivada finita em $x = 0$ (se não conseguir resolver esta questão, use $\alpha = 5$ nas alíneas seguintes).

b) Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Estude f quanto a diferenciabilidade e determine f' nos pontos em que existir.

d) Estude f quanto à existência de extremos e intervalos de monotonia.

e) Determine o contradomínio de f.

VI. Considere $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável, com derivada contínua, e verificando $\phi(x) \geq x^2$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Mostre que para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$ existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\phi'(c) = \lambda$.

2 Solução

I. a) Observando que a função contínua sen é crescente em $[\pi/4, \pi/2]$, decrescente em $[\pi/2, 2\pi/3]$, $\operatorname{sen}(2\pi/3) = \sqrt{3}/2 > \sqrt{2}/2 = \operatorname{sen}(\pi/4)$ e $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$ obtemos que $A = [\sqrt{2}/2, 1]$.

b) Notamos que $\sqrt{2}/2 \notin \mathbb{Q}$ e que a sucessão de somas parciais da série definindo B é crescente com $S_0 = 1$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \lim S_n = e$. Daí que

$$\inf A = \min A = \sqrt{2}/2, \qquad \sup A = 1, \qquad \text{máx}\, A \text{ não existe,}$$
$$\inf B = \min B = 1, \qquad \sup B = e, \qquad \text{máx}\, B \text{ não existe .}$$

c) i) A proposição é falsa porque, por exemplo, a sucessão definida por $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ tem todos os seus termos no intervalo $[0, 1[$, é convergente e o seu limite é $1 \notin [0, 1[$.

ii) A proposição é verdadeira pois como arctg é uma função limitada a sucessão $(\operatorname{arctg}(y_n))$ também é limitada e pelo teorema de Bolzano-Weierstrass possui pelo menos uma subsucessão convergente.

iii) A proposição é falsa pois, por exemplo, a sucessão (S_n) é convergente para e e todos os seus termos são distintos.

II. 1. a) Notamos que todos os termos da série são positivos donde convergência corresponderá a convergência absoluta. Como

$$\lim \frac{\frac{n^2+5n-1}{n^4-n\operatorname{sen} n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{n^4 + 5n^3 - n^2}{n^4 - n\operatorname{sen} n} = \lim \frac{1 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^4}}{1 - \frac{\operatorname{sen} n}{n^3}} = 1$$

obtemos que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+5n-1}{n^4-n\operatorname{sen} n}$ é da mesma natureza que $\sum \frac{1}{n^2}$ e portanto é convergente.

b) Como o termo geral da série não converge para 0 obtemos que $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n$ é divergente.

c) Como

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log\left(\frac{n+2}{n}\right)}{\log(n)\log(n+2)} = \frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+2)}$$

trata-se de uma série de Mengoli da forma $\sum a_n - a_{n+2}$ com $a_n = \frac{1}{\log n}$. Como $\lim a_n = 0$ a série converge com soma $a_2 + a_3 = \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 3}$. Trata-se de convergência absoluta pois $\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+2)} > 0$ para todo o $n > 2$.

d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n^2}$ converge absolutamente pois

$$|(-1)^n e^{-n^2}| = e^{-n^2} < e^{-n}.$$

e a série geométrica $\sum e^{-n}$ converge.

2. Começamos por considerar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(1/n) y^n, \quad y \in \mathbb{R}.$$

O raio de convergência desta série será

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|\cos(1/n)|}} = 1.$$

Daí que a série original converge absolutamente para $|3x-1|<1$ e diverge para $|3x-1|>1$. Nos casos $y=1$ e $y=-1$ o termo geral da série não converge para 0 pelo que diverge também nestes casos. Assim a série converge absolutamente para $0<x<2/3$ e diverge para $x\le 0$ ou $x\ge 2/3$.

III. Sendo a série $\sum(b_n-b_{n+1})$ uma série de Mengoli, a sua convergência é equivalente à convergência da sucessão de termo geral b_n. Sendo esta sucessão convergente, é limitada, isto é, $\exists C>0$: $|b_n|\le C, \forall n\in\mathbb{N}$. Logo,

$$\sum|a_nb_n|\le\sum C|a_n| = C\sum|a_n|,$$

e, o resultado segue imediatamente da hipótese de convergência absoluta da série $\sum a_n$ e do critério de comparação.

IV. a) O teorema de derivação da função composta e a diferenciabilidade de arctg, f e g implicam que h é diferenciável e

$$h'(x) = f'(\operatorname{arctg}(g(x)))\frac{g'(x)}{1+[g(x)]^2}.$$

b) Como o contradomínio da função arctg é $]-\pi/2,\pi/2[\,\subset\,]-2,2[$ temos que $f'(\operatorname{arctg}(g(x)))<0$ para todo o $x\in\mathbb{R}$ donde $h'(x)>0$ para todo o $x\in\mathbb{R}$. Assim sendo h é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.

V. a) Para f ser diferenciável em 0 têm de existir e ser finitas as derivadas laterais em 0. Temos:

$$f'_d(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\alpha e^{|x-1|}=\alpha e,$$
$$f'_e(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}x+3+2\frac{\log(1-x)}{x}=3+2\lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{1-x}=1.$$

pelo que devemos ter $\alpha e=1$, isto é, $\alpha=1/e$.

b) Temos

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}x^2+3x+2\log(1-x)=+\infty,$$
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}xe^{-1}e^{|x-1|}=\lim_{x\to+\infty}xe^{x-2}=+\infty.$$

c) Os resultados sobre diferenciabilidade do produto, diferenciabilidade da função composta e das funções exponencial e logaritmo garantem que f é diferenciável para $x\neq 0,1$. Para $x=0$ verificámos a diferenciabilidade na alínea (a). Quanto a $x=1$ temos

$$f'_d(1)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(1+h)e^{h-2}-e^{-1}}{h}=2e^{-1},$$
$$f'_e(1)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(1+h)e^{-h}-e^{-1}}{h}=0.$$

Assim f não é diferenciável em $x = 1$. Nos pontos em que f é diferenciável temos

$$f'(x) = \begin{cases} (1+x)e^{x-2}, & \text{se } x > 1, \\ (-x+1)e^{-x}, & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ 2x + 3 + \frac{2}{x-1} & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

d) Da expressão da derivada na alínea anterior nota-se imediatamente que esta é positiva para $x > 0$. Para $x < 0$ temos

$$f'(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x - 1}$$

pelo que o sinal da derivada é o oposto de $2x^2 + x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 1)$. Obtemos então que f' é positiva em $]-1, 0[$ e negativa em $]-\infty, -1[$.

Sendo assim, e tomando também em consideração a continuidade de f em 1, obtemos que f é decrescente em $]-\infty, -1]$ e crescente em $[-1, +\infty[$. Assim -1 é um ponto de mínimo absoluto de f e não existem outros pontos de extremo.

e) A continuidade de f, o teorema do valor intermédio e os limites calculados na alínea (b) e o facto de $f(-1)$ ser um mínimo absoluto implicam que o contradomínio de f é $[f(-1), +\infty[$.

VI. Verificando $\phi(x) \geq x^2 \; \forall x \in \mathbb{R}$, logo se conclui que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\phi(x)}{x} = +\infty,$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\phi(x)}{x} = +\infty.$$

Sendo assim, $\frac{\phi(b)-\phi(0)}{b}$ toma valores arbitráriamente grandes, desde que se considere $b \in \mathbb{R}$ com $|b|$ suficientemente grande. Aplicando o Teorema de Lagrange ao intervalo $[0, b](b > 0), ou[b, 0], (b < 0)$, conclui-se que ϕ' toma valores arbitráriamente grandes e valores arbitrariamente pequenos. Logo, dado $\lambda \in \mathbb{R}$, a função ϕ' toma valores λ_1, λ_2 tais que $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. Como a função ϕ' é contínua, o Teorema do valor intermédio diz-nos que também terá que necessariamente tomar o valor λ.