Análise Matemática I

2º Exame

Campus da Alameda **29 de Janeiro de 2003, 9 horas**

LEEC, LCI, LEGI, LQ, LEQ, LEB, LEAmb

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

I. Considere dois subconjuntos de $\mathbb{R}$, A e B, em que:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \log|x-1| - \log|x+1| > 0\}, \qquad B = \left\{\frac{\cos(n\pi)}{n} : n \in \mathbb{N}_1\right\}.$$

a) Escreva o conjunto A na forma de um intervalo ou reunião de intervalos.

b) Determine, se existirem, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo dos conjuntos $A \setminus \mathbb{Q}$ e B.

c) Seja (a_n) uma sucessão definida por:

$$a_1 = \frac{\pi}{8}, \qquad a_{n+1} = 2a_n \operatorname{sen}(a_n), \qquad n \geq 1.$$

i) Mostre, usando indução finita, que $0 < a_n < \frac{\pi}{6}$ para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

ii) Mostre que (a_n) é decrescente.

iii) Justifique que (a_n) é convergente e calcule o seu limite.

II. 1. Estude a natureza (convergência simples, absoluta ou divergência) das seguintes séries:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcsen}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right) \qquad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\pi/e}+n} \qquad \text{d)} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)$$

2. a) Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a seguinte série converge absolutamente, simplesmente ou diverge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}|x|^n.$$

b) Calcule a soma da série num dos extremos do intervalo de convergência. [**Sugestão**: Note que a série numérica obtida nesse extremo do intervalo é uma série de Mengoli.]

III. Considere a função f definida por:

$$f(x) = x^3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right), \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

a) Justifique que f é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e determine f'.

b) Calcule

$$\lim_{x \to +\infty} f(x), \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x).$$

c) Mostre que a função f possui um prolongamento por continuidade à origem, $\overline{f}$, e determine $\overline{f}(0)$.

d) Justifique que não existe $\lim_{x \to 0} f'(x)$.

e) Mostre que o prolongamento por continuidade f à origem, $\overline{f}$, admite derivada em $x = 0$ e obtenha $\overline{f}'(0)$.

IV. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e considere a função h definida por:

$$h(x) = g(\log(x)) - g(x)\log(x).$$

a) Estude h quanto à diferenciabilidade e determine h' nos pontos em que existir.

b) Suponha que $g(1) = g'(1) = 1$ e que $g'(0) = 0$. Mostre que h não tem um extremo local em $x = 1$ e, sabendo que h é monótona, decida se h é crescente ou decrescente.

V. Seja ϕ uma função contínua definida em $\mathbb{R}$ e

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \phi(x) = x\}.$$

Prove que são verdadeiras as seguintes afirmações:

a) Se $A = \emptyset$, então:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \phi(x) < x \qquad \text{ou} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \phi(x) > x.$$

b) Se $\mathbb{Q} \subset A$ então $A = \mathbb{R}$.

c) Se $A = \mathbb{Z}$ e adicionalmente ϕ é diferenciável, então a equação $\phi'(x) = 1$ tem infinitas soluções.