Análise Matemática I

2º Exame

Campus da Alameda **20 de Janeiro de 2005, 13 horas**

Licenciaturas em
Engenharia do Ambiente, Engenharia Biológica,
Engenharia Informática, Engenharia Química, Química

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(4,0) I. Considere:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \log|x-1| \leq 0\}.$$

a) Mostre que $A = [0,2] \setminus \{1\}$.

b) Determine ou mostre que não existem, os supremo, máximo, ínfimo e mínimo de cada um dos conjuntos A, $A \setminus \mathbb{Q}$ e $]0,+\infty[\, \setminus A$.

c) Decida quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas:

i) Toda a sucessão (x_n) crescente e de termos em A tem um limite em A.

ii) Toda a sucessão (y_n) de termos em A tem uma subsucessão convergente (em $\mathbb{R}$).

iii) Se (z_n) é uma sucessão convergente de termos em A e $((z_n-1)^{-1})$ é uma sucessão limitada, então $\lim z_n \in A$.

iv) Se $F : A \to \mathbb{R}$ é contínua e prolongável por continuidade ao ponto 1, então F é limitada.

(4,5) II. 1. Estude a natureza (convergência simples, absoluta ou divergência) das seguintes séries:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right), \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n\sqrt[4]{n}}, \qquad \text{c)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!+1}{2^n n!}.$$

2. Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a seguinte série converge absolutamente, simplesmente ou diverge:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{3^n+1}.$$

(9,5) III. 1. Calcule ou justifique que não existem:

$$\text{a)} \lim_{x\to 1} \frac{\log x}{(x+1)^2}, \qquad \text{b)} \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}, \qquad \text{c)} \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(e^x+x)}{x^2}.$$

2. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que a sua derivada g' é crescente e $g'(0) = 0$. Define-se $\varphi(x) = g(x) + \operatorname{arctg}[g(x)]$.

   Mostre que $\varphi(0)$ é um mínimo absoluto de φ.

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \log(\frac{x}{x-1}), & \text{se } x > 1 \\ \operatorname{arctg}(x) - x, & \text{se } x \leq 1. \end{cases}$$

   a) Calcule ou mostre que não existem

$$\lim_{x \to -\infty} f(x), \qquad \lim_{x \to 1} f(x), \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

   b) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule a derivada f'.

   c) Determine os intervalos de monotonia de f e, se existirem, pontos de extremo relativo, classificando-os quanto a serem máximos, mínimos, relativos ou absolutos.

   d) Determine o contradomínio de f.

(2,0) IV. Considere sucessões de termos gerais a_n, b_n e c_n ($n \in \mathbb{N}_1$) tais que:

- $\lim a_n = 0$;
- A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n - b_n)$ é convergente.
- Para $n \geq 1$, $c_{2n} = -b_n$ e $c_{2n-1} = a_n$.

a) Mostre que a série $\sum c_n$ é convergente.

b) Use o resultado anterior para mostrar que $\sum w_n$ é convergente quando

$$w_{2n} = -\frac{1}{n^{3/4}},$$
$$w_{2n-1} = \frac{1}{n^{3/4} + n^{1/4}}.$$

c) Justifique que a série $\sum w_n$ da alínea anterior é uma série alternada convergente que **não** satisfaz o *critério de Leibniz.*