Análise Matemática I

1^a data de exame

17 de Janeiro de 2002

Licenciaturas em
Engenharia do Ambiente e Engenharia Aeroespacial

Resolução e alguns comentários

I. 1. a) Para $n \in \mathbb{N}$ temos $a_{2n} = \log(\cos(1/2n) + 1) \to \log 2$ e $a_{4n+1} = \log(1 + \cos(1/(4n+1)) + 1) \to \log 3$ graças à continuidade das funções log e cos. Daí que a sucessão não tenha limite devido a ter dois sublimites distintos.

b) Temos $b_n = \sqrt[n]{c_n}$ com $c_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$. Sabemos que se existir o limite de $\left(\frac{c_{n+1}}{c_n}\right)$ então o limite de (b_n) existe e tem o mesmo valor. Portanto calculamos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(2(n+1))!}{(2n)!} \frac{(n!)^2}{((n+1)!)^2} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4 = \lim_{n\to+\infty} b_n.\end{aligned}$$

2. a) Temos $0 < \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2} < \frac{\pi}{2n^2}$ pelo que o critério de comparação e a convergência de $\sum \frac{1}{n^2}$ permitem concluir que a série é convergente.

b) Como

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n+1)/2^{n+1}}{\log n/2^n} = \frac{1}{2}\frac{\log(n+1)}{\log n} = \frac{1}{2}.$$

a série é convergente. A última passagem pode ser justificada aplicando a regra de Cauchy para calcular $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+1)}{\log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/(x+1)}{1/x} = 1$.

3. Temos $\psi(x) = e^{x^2 \log(\varphi(x^2+1))}$. pelo que, usando o teorema de derivação da função composta, ψ é diferenciável e

$$\begin{aligned}\psi'(x) &= e^{x^2 \log(\varphi(x^2+1))} \frac{d}{dx}\left(x^2 \log(\varphi(x^2+1))\right) \\ &= \left(\varphi(x^2+1)\right)^{x^2} \left(2x \log(\varphi(x^2+1)) + \frac{2x^3 \varphi'(x^2+1)}{\varphi(x^2+1)}\right).\end{aligned}$$

4. Como $e^{x-\sqrt{3}} \geq 1 \Leftrightarrow x - \sqrt{3} \geq 0$ (a exponencial é uma função estritamente crescente) podemos escrever

$$A = \mathbb{Q} \cap \left[\sqrt{3}, +\infty\right[= \mathbb{Q} \cap \left]\sqrt{3}, +\infty\right[$$

em que na última igualdade se usou ser $\sqrt{3}$ um irracional.

a) Como A é ilimitado à direita não existem $\sup A$ e $\max A$. Temos $\inf A = \sqrt{3}$ e não existe mínimo.

b) Como $A \cap [0,2]$ é limitado qualquer sucessão de termos neste conjunto possui subsucessões convergentes. Por densidade dos racionais em $\mathbb{R}$ verificamos que para cada $n \in \mathbb{N}_1$ existe $q_n \in \mathbb{Q}$ tal que $q_n \in \left]\sqrt{3}, \sqrt{3}+1/n\right[$. Tal sucessão $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, para n suficiente grande (de facto para $n > 3$), tem os seus termos no conjunto e converge para $\sqrt{3}$ que não pertence a A.

II. 1. a) A função arcsen está definida e é contínua em $[-1,1]$ e é diferenciável em $]-1,1[$. Daí que o teorema de derivação da função composta e o teorema da continuidade da função composta garantam a diferenciabilidade em $]-\infty,0[\,\cup\,]0,+\infty[$ e a continuidade em 0.

Para decidir da diferenciabilidade de g em 0 pode considerar-se

$$\begin{aligned}
g'_d(0) &= \lim_{x\to 0+} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{arcsen}(1/(1+x^2)) - \pi/2}{x} \\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^2}} \, \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x^4+2x^2}} \, \frac{-2x}{1+x^2} \\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} \, \frac{-2}{1+x^2} = -\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Um cálculo análogo, com o aparecimento de um sinal $-$ na penúltima igualdade, mostra que $g'_e(0) = \sqrt{2}$ e portanto g não é diferenciável na origem. Assim o domínio de diferenciabilidade é $]-\infty,0[\,\cup\,]0,+\infty[$.

b) Para esboçar o gráfico de g convém notar que g é uma função par, isto é $g(-x) = g(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$, e bastará tomar $x \geq 0$ nos cálculos seguintes.

Do cálculo da alínea anterior observamos que para $x > 0$

$$g'(x) = -\frac{2}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}}$$

pelo que g é estritamente decrescente em $]0,+\infty[$ (e estritamente crescente em $]-\infty,0[$).

O cálculo de g'' para $x > 0$ conduz a

$$g''(x) = \frac{4x\sqrt{x^2+2} + \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+2}}}{(1+x^2)^2(x^2+2)} > 0.$$

pelo que g é convexa em $]0,+\infty[$ (e em $]-\infty,0[$).

Notando que

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

concluimos quanto a assímptotas que $y = 0$ é uma assímptota quando $x \to +\infty$ (e quando $x \to -\infty$).

Podemos concluir que um esboço do gráfico será

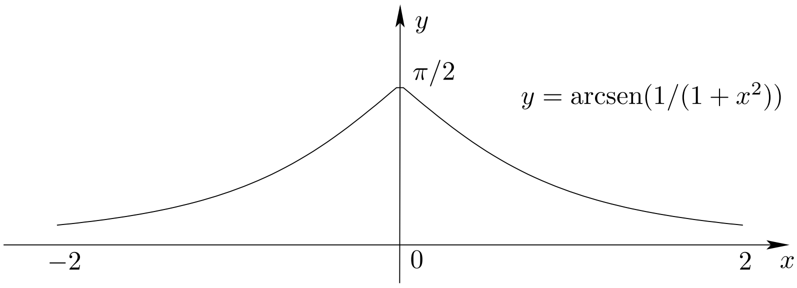

Figura 1: O gráfico de $y = \text{arcsen}(1/1 + x^2)$.

2. a) Usando a regra de Cauchy

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{\text{sen}(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x\cos(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2\cos(x^2) - 4x^2\,\text{sen}(x^2)} = \frac{1}{2}.$$

b) Começando por "mudar variáveis" via $t = e^{-x}$ e usando a regra de Cauchy consideramos

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\text{arctg}\, t}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{1+t^2} = 1.$$

3. Pelo teorema de Taylor o único polinómio nestas condições será o polinómio de MacLaurin relativo à função tg.

Calculamos as derivadas da tg até à terceira ordem

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\text{tg}\, x) &= \frac{1}{\cos^2 x},\\
\frac{d^2}{dx^2}(\text{tg}\, x) &= \frac{2\,\text{sen}\, x}{\cos^3 x},\\
\frac{d^3}{dx^3}(\text{tg}\, x) &= \frac{2\cos^2 x + 6\,\text{sen}^2 x}{\cos^4 x}.
\end{aligned}$$

Assim o polinómio de MacLaurin de terceira ordem relativo à tg será

$$\begin{aligned}
&\text{tg}(0) + \frac{d}{dx}(\text{tg}\, x)|_{x=0}x + \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dx^2}(\text{tg}\, x)|_{x=0}x^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3}{dx^3}(\text{tg}\, x)|_{x=0}x^3\\
&= x + \frac{2}{3!}x^3 = x + \frac{x^3}{3}.
\end{aligned}$$

4. Sabemos que

$$\begin{aligned}
\text{sen}\, x &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\\
&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad \forall_{x\in\mathbb{R}}\\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \ldots, \quad \forall_{x\in]-1,1[}.
\end{aligned}$$

Assim dividindo por x ambos os membros da primeira igualdade e derivando ambos os membros na segunda obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen} x}{x} &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \\ &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad \forall_{x\neq 0} \\ \frac{1}{(1-x)^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \ldots, \quad \forall_{x\in]-1,1[}.\end{aligned}$$

Somando membro a mebro as igualdades obtém-se o resultado pretendido. Note-se que H é contínua em 0, a soma das duas séries do lado direito das igualdades também o é e que a série de Mac-Laurin de $\frac{1}{(1-x)^2}$ diverge se $|x| = 1$ pelo que o maior intervalo aonde a série representa a função é $]-1,1[$.

III. 1. a) Trata-se de uma série telescópica (ou de Mengoli) pelo que a sua sucessão de somas parciais terá termo geral

$$\log(\log(n+1)) - \log(\log 2) \to +\infty$$

pelo que a série diverge.

b) Aplicando o teorema de Lagrange (valor médio) à função diferenciável $]1,+\infty[\ \ni x \mapsto \log(\log x) \equiv \eta(x)$ em $]x, x+1[$ obtém-se

$$\log(\log(x+1)) - \log(\log x) = \frac{d}{dx}(\log(\log x))|_{x=c} \tag{1}$$

para algum $c \in\ ]x, x+1[$. Ora

$$\frac{d}{dx}(\log(\log x)) = \frac{1}{x \log x}.$$

Como o segundo membro da igualdade anterior é uma função decrescente de x podemos majorar o segundo membro de (1) por $\eta(x)$. Por outro lado o log ser estritamente crescente garante que $\log(\log(x+1)) > \log(\log x)$.

c) A alínea anterior implica que o termo geral da série $\sum \frac{1}{n \log n}$ é minorado pelo termo geral da série divergente de termos não negativos da alínea (a). O resultado segue do critério geral de comparação.

2. a) Aplicando o teorema de Lagrange a $F(x) - \alpha x - b$ no intervalo $[n, n+1]$ com $n \in \mathbb{N}_1$ obtemos

$$(F(n+1) - \alpha(n+1) - \beta) - (F(n) - \alpha(n) - \beta) = F'(c_n) - \alpha$$

para algum $c_n \in\ ]n, n+1[$. Passando ao limite quando $n \to \infty$ na igualdade anterior obtemos $\lim_{n\to+\infty} F'(c_n) = 0$.

b) Considere-se $F(x) = \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x}$. Temos que $\lim_{x\to+\infty} = 0$ mas $F'(x) = 2\cos(x^2) - \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}$ que não tem limite quando $x \to +\infty$.

c) De facto se tomarmos $F(x) = \log x$ temos

$$\lim_{x \to +\infty} F'(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

mas $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$.