Análise Matemática I

2ª data de Exame

Campus de Lisboa (Alameda) **2 de Fevereiro de 2001, 17 horas**

Licenciatura em Engenharia Informática e de Computadores

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(7,0) **I.** 1. Determine para que valores dos parâmetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ é que a função h real de variável real definida por

$$h(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(e^x), & \text{se } x > 0, \\ ax^2 + bx + c, & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

é diferenciável em $\mathbb{R}$ e determine a derivada (em $\mathbb{R}$) nesse(s) caso(s).

2. Seja $s \in \mathbb{R}$.

a) Calcule em função de s

$$\lim_{x \to +\infty} x^s \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right).$$

b) Estude em função de s a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^s \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n \right).$$

3. Considere as séries:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \right), \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^{n+1}} \right).$$

Estude-as quanto a convergência e calcule a soma das que forem convergentes.

4. Considere os conjuntos A e B definidos por

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq \operatorname{sen}(\pi x) < 1\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : \log x \geq \log(1 - x)\}.$$

a) Exprima A e B como uniões de intervalos disjuntos dois a dois.

b) Determine, quando existirem, $\sup A$, $\sup(A \cap B)$, $\max(A \cap B)$, $\min(B \setminus \mathbb{Q})$.

c) Decida se uma sucessão decrescente de termos em B é necessariamente convergente para um ponto de B.

d) Considere uma função $g : B \to \mathbb{R}$ contínua e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de termos em B. Decida se a série $\sum \frac{g(x_n)}{n^2}$ é necessariamente convergente. Se optar pela negativa dê um exemplo que justifique a afirmação. E se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ for decrescente?

(9,0) **II.** 1. Considere uma função real de variável real g definida por

$$g(x) = \log(e^x - 1).$$

a) Determine o domínio e o domínio de diferenciabilidade de g e calcule g'.

b) Determine todas as assímptotas ao gráfico de g.

c) Estude g quanto à existência de pontos de extremo local, crescimento, sentido de concavidades e pontos de inflexão e esboce o gráfico de g.

2. Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{1/(e^{1/x}+1)}$,

b) $\lim\limits_{\lambda\to +\infty} (1+\lambda)^2(\cos(1/(1+\lambda)) - 1)$,

3. Determine a série de Taylor relativa a $x = 0$ (série de Mac Laurin) da função $H(x) = x^2 \operatorname{sen}(x^2) + \log(1 + 2x)$ e o maior intervalo em que representa a função.

4. Determine a derivada de ordem 12 da função e^{x^4} para $x = 0$ [**Nota**: *Não* calcule 12 derivadas!].

(4,0) **III.**

1. Uma função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com derivada contínua em $\mathbb{R}$ satisfaz a relação

$$F(n+1) = \frac{1}{n} + F(n) \quad \text{para todo o } n \in \mathbb{N}_1.$$

Calcule os limites quando $x \to +\infty$ de F e F' *supondo que os limites existem.* Mostre que os limites podem não existir.

2. Uma função $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[0,1]$, diferenciável em $]0,1[$ e satisfaz $G(1) = 0$, $G(0) = 1$. Mostre que existem $x, y \in\ ]0,1[$ tais que $G(x) - x^2 = 0$ e $G'(y) + 2y = 0$.