Análise Matemática I

2º Exame

Campus da Alameda **29 de Janeiro de 2003, 9 horas**

Licenciatura em Engenharia Aeroespacial

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

I. Considere dois subconjuntos de $\mathbb{R}$, A e B, em que:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \log|x-1| - \log|x+1| > 0\}, \qquad B = \left\{ \frac{\cos(n\pi)}{n} : n \in \mathbb{N}_1 \right\}.$$

a) Escreva o conjunto A na forma de um intervalo ou reunião de intervalos.

b) Determine, se existirem, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo dos conjuntos $A \setminus \mathbb{Q}$ e B.

c) Seja (a_n) uma sucessão definida por:

$$a_1 = \frac{\pi}{8}, \qquad a_{n+1} = 2a_n \operatorname{sen}(a_n), \qquad n \geq 1.$$

i) Mostre, usando indução finita, que $0 < a_n < \frac{\pi}{6}$ para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

ii) Mostre que (a_n) é decrescente.

iii) Justifique que (a_n) é convergente e calcule o seu limite.

II. 1. Estude a natureza (convergência simples, absoluta ou divergência) das seguintes séries:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcsen}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right) \qquad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\pi/e}+n} \qquad \text{d)} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)$$

2. a) Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a seguinte série converge absolutamente, simplesmente ou diverge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} |x|^n.$$

b) Calcule a soma da série num dos extremos do intervalo de convergência. [**Sugestão**: Note que a série numérica obtida nesse extremo do intervalo é uma série de Mengoli.]

III. Considere a função f definida por:

$$f(x) = x^3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right), \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

a) Justifique que f é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e determine f'.

b) Calcule

$$\lim_{x \to +\infty} f(x), \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x).$$

c) Mostre que a função f possui um prolongamento por continuidade à origem, $\overline{f}$, e determine $\overline{f}(0)$.

d) Justifique que não existe $\lim_{x \to 0} f'(x)$.

e) Mostre que o prolongamento por continuidade f à origem, $\overline{f}$, admite derivada em $x = 0$ e obtenha $\overline{f}'(0)$.

IV. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e considere a função h definida por:

$$h(x) = g(\log(x)) - g(x) \log(x).$$

a) Estude h quanto à diferenciabilidade e determine h' nos pontos em que existir.

b) Suponha que $g(1) = g'(1) = 1$ e que $g'(0) = 0$. Mostre que h não tem um extremo local em $x = 1$ e, sabendo que h é monótona, decida se h é crescente ou decrescente.

V. Seja ϕ uma função diferenciável definida em $D \subset \mathbb{R}$ e $[a, b] \subset D$. Diz-se que o gráfico de ϕ restringida a $[a, b]$ é *rectificável* se existir um número $M > 0$ tal que, qualquer que seja a família finita de pontos $x_1, \ldots, x_k$ em $[a, b]$ com $a \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k \leq b$, o comprimento da linha poligonal definida pela união dos segmentos de recta unindo $(x_i, \phi(x_i))$ a $(x_{i+1}, \phi(x_{i+1}))$ com $i = 1, \ldots, k - 1$ é menor do que M.

a) Mostre que se a derivada de ϕ é limitada em $[a, b]$ então o gráfico de ϕ é rectificável em $[a, b]$.

b) Considere $\psi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p \in \{1, 2\}$, definida por

$$\psi_p(x) = \begin{cases} x^p \operatorname{sen}(1/x), & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

i) Mostre que ψ_2 é rectificável em $[0, 1]$.

ii) Mostre que ψ_1 **não** é rectificável em $[0, 1]$. [**Sugestão**: Construa linhas poligonais como na definição cujos comprimentos formem uma sucessão de somas parciais de uma série divergente.]