Análise Matemática I

1º Exame

Campus da Alameda **6 de Janeiro de 2005, 13 horas**

Licenciaturas em
Engenharia do Ambiente, Engenharia Biológica,
Engenharia Química, Química

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

[5,5] I. Considere dois subconjuntos de $\mathbb{R}$, A e B, em que:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \log\left(\frac{\sqrt{2}x+1}{1-x^2}\right) \geq 0 \right\}, \qquad B = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_1 \right\}.$$

Considere também uma função contínua $F : A \to \mathbb{R}$.

a) Mostre que $A = \left[-\sqrt{2}, -1\right[\cup [0,1[$.

b) Determine, quando existirem, os supremos, máximos, ínfimos e mínimos dos conjuntos A, $A \cap B$ e $A \cap \mathbb{Q}$.

c) Decida quais das seguintes afirmações são necessariamente verdadeiras e quais são falsas:

i) Se (x_n) é uma sucessão de termos em A com $x_{2n} < 0$ e $x_{2n-1} > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}_1$ então (x_n) é divergente.

ii) O contradomínio de F é um intervalo.

iii) Se F é crescente então tem mínimo em A.

iv) Se F é crescente então tem máximo em A.

[5,0] II. 1. Estude a natureza (convergência simples, absoluta ou divergência) das seguintes séries e calcule a soma de uma delas:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} [\operatorname{arctg}(n) - \operatorname{arctg}(n+1)] \qquad \text{b)} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} - n^2} \qquad \text{c)} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{\pi^{n+2}}$$

2. Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a seguinte série converge absolutamente, simplesmente ou diverge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) x^n.$$

[5,5] III. Considere a função f definida por:

$$f(x) = e^{-|x|}(x+1)$$

a) Estude f quanto a diferenciabilidade em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Mostre que f é contínua mas não diferenciável em 0.

c) Estude f quanto à existência de extremos locais ou absolutos e determine os intervalos de monotonia da função.

d) Determine justificadamente o contradomínio de f.

[2,0] IV. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e considere a função h definida por:

$$h(x) = g(\cos(x)) - \cos(g(x)).$$

a) Determine o domínio de diferenciabilidade de h e obtenha uma expressão para h' envolvendo g e g'.

b) Supondo que g' é uma função contínua em $\mathbb{R}$ verificando $g(0) = \pi/2$ e $g'(0) = 1$, mostre que h é estritamente crescente numa vizinhança de 0.

[2,0] V. Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $]0, +\infty[$ e verificando $\phi(2n) = 2n$, $\phi(2n-1) = 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}_1$.

a) Mostre que a equação $\phi'(x) = 0$ tem infinitas raízes.

b) Mostre que existem sucessões (a_n) e (b_n), ambas com limite $+\infty$, tais que $\lim \phi'(a_n) = +\infty$ e $\lim \phi'(b_n) = -\infty$.

c) Supondo adicionalmente que ϕ' é contínua, determine o contradomínio de ϕ'.