Análise Matemática I

Exame modelo

Campus de Lisboa **Janeiro de 2001**

Licenciatura em Engenharia Informática e de Computadores

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(7,0) **I.** 1. Estude a existência dos seguintes limites:

$$\text{a)} \lim_{n\in\mathbb{N}, n\to+\infty} \operatorname{sen}(n\pi/2) n \operatorname{sen}(1/n), \qquad \text{b)} \lim_{n\in\mathbb{N}, n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}.$$

e calcule-os quando existam.

2. Considere as séries:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-n}, \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{\log(n+1)} - \frac{1}{\log n}\right).$$

Estude-as quanto a convergência e calcule a soma de uma delas.

3. Determine para que valores dos parâmetros $a, b \in \mathbb{R}$ é que a função f real de variável real definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(x^2 + x + 1), & \text{se } x > 0, \\ ax + b, & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

é diferenciável na origem.

4. Considere os conjuntos A e B definidos por

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \log(x - \sqrt{2}) \geq 0\right\}, \qquad B = \left\{x \in \mathbb{R} : 0 < \frac{2x-1}{x+3} \leq 1\right\}.$$

a) Exprima A e B como uniões de intervalos.

b) Determine, quando existirem, $\inf A$, $\inf(A \cap \mathbb{Q})$, $\min A$, $\min(A \cap \mathbb{Q})$.

c) Decida se uma sucessão de termos em $A \cap B$ possui necessariamente subsucessões convergentes.

(9,0) **II.** 1. Considere uma função real de variável real g definida por

$$g(x) = xe^{\frac{1}{x-1}}.$$

a) Determine o domínio e o domínio de diferenciabilidade de g e calcule g'.

b) Determine todas as assímptotas ao gráfico de g.

c) Determine os pontos de estacionaridade de g. Classifique-os quanto a serem pontos de máximo ou mínimo local de g.

2. Calcule os limites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log(x^2+1)}{\log(x^4+x+1)}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\,\mathrm{sen}\, x - 3x - x^3}{x^5}$,

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{arctg}(1/x) - (1/x)}{\cos(1/x) - 1}$.

3. Determine um polinómio de segundo grau $P(x)$ tal

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x \log(x+1) - P(x)}{x^2} = 0.$$

4. Determine a série de Taylor de potências de $x-1$ relativa à função $F(x) = e^x + \log x$ e o maior intervalo em que a série representa a função.

(4,0) **III.** Considere uma função $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indefinidamente diferenciável ($H \in C^\infty(\mathbb{R})$) e dois polinómios de segundo grau $Q_1(x) = ax^2+b+c$, ($a \neq 0$), e $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, ($\alpha > a > 0$). Suponha que $H(x) > Q_2(x)$ se $|x| > 1$.

a) Mostre que $H > Q_1$ em $\mathbb{R}$ então $H - Q_1$ tem um mínimo positivo em $\mathbb{R}$.

b) Mostre que todas as soluções de $H(x) = Q_1(x)$ ocorrem num conjunto limitado.

c) Mostre que se $H - Q_1$ tem infinitos zeros existe um ponto $\overline{x} \in \mathbb{R}$ tal que H tem derivadas de ordem 3 ou superior nulas em $\overline{x}$.

d) Mostre que se $H - Q_1$ tem infinitos zeros existe um ponto $x' \in \mathbb{R}$ para o qual não existe uma vizinhança onde H possa ser representada pela série de Taylor relativa a x'.