Análise Matemática I

2º Exame

Campus da Alameda **23 de Janeiro de 2006, 13 horas**

Licenciaturas em
Engenharia do Ambiente, Engenharia Biológica, Engenharia Civil, Engenharia e Arquitectura Naval, Engenharia do Território, Engenharia Química, Química

---

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(5,0) I. Considere:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \log(x/2) \leq 0\}, \qquad B = \left\{x : \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{x}\right) > 0\right\}.$$

a) Mostre que $A \cap B =]0, 2] \setminus \left\{\frac{1}{k} : k \in \mathbb{N}_1\right\}$.

b) Indique, se existirem em $\mathbb{R}$, $\inf A$, $\max(A \cap B)$, $\min(A \cap B)$ e $\max((A \cap B) \setminus \mathbb{Q})$.

c) Decida justificadamente quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas:

i) Toda a sucessão decrescente de termos em $A \cap B$ tem limite 0.

ii) Toda a sucessão estritamente decrescente com os termos de ordem par em $A \cap B$ e os termos de ordem ímpar em $\mathbb{R} \setminus (A \cap B)$ tem limite 0.

iii) Existe uma função $G : [0, 1] \to A \cap B$ contínua e sobrejectiva.

(6,0) II. 1. Determine ou mostre que não existem os limites das seguintes sucessões:

$$\text{a)} \lim \frac{\cos(n\pi)}{\operatorname{sen}(1/n\pi) + 1}, \qquad \text{b)} \lim \frac{e^{n\pi} + 1}{2^n + n^2}.$$

2. Calcule:

$$\text{a)} \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x^2) - 1}{x^4}, \qquad \text{b)} \lim_{x \to 0} (x^2 + 1)^{1/x^2}.$$

3. Estude a natureza (convergência simples, absoluta ou divergência) das seguintes séries[1]:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n\sqrt{n} + 1}{n^3 + 2n - \sqrt{n}}, \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcsen}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

$$\text{c)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2e^{n+2}}{3^n}.$$

---

[1] A alínea (c) está alterada em relação ao original: $-$ era $+$.

4. Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a seguinte série converge absolutamente, simplesmente ou diverge:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!(x-1)^n}{n!+1}.$$

(7,0) III. 1. Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $g(0) = g'(0) = 0$ e g' é uma função estritamente monótona. Define-se

$$\varphi(x) = 2\operatorname{tg}(g(x)) - g(x).$$

Mostre que $\varphi(0)$ é um extremo local de φ.

2. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{x+1}, & \text{se } x > 0, \\ 1 + \log(1-x), & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

a) Calcule ou mostre que não existem

$$\lim_{x\to-\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

b) Justifique que f é diferenciável para $x \neq 0$ e calcule a derivada $f'(x)$ se $x \neq 0$.

c) Mostre que f é contínua mas não diferenciável em 0.

d) Determine os pontos de extremo de f, caso existam, e classifique-os quanto a serem pontos de máximo ou mínimo, locais ou absolutos.

e) Determine o contradomínio de f .

(2,0) IV. Seja $\phi : [-2,2] \to \mathbb{R}$ uma função, e (a_n) e (b_n) sucessões em $[-1,1]$ tais que $a_n < b_n < a_{n+1}$, $\phi(a_n) = a_n$ e $\phi(b_n) = -b_n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

a) Justifique que (a_n) e (b_n) são sucessões convergentes com o mesmo limite.

b) Justifique que se $\lim a_n \neq 0$ então ϕ não é contínua.

c) Justifique que se $\lim a_n = 0$ então ϕ não é diferenciável.

d) Justifique se ϕ tem derivada contínua em $]-2,0[\cup]0,2[$ então o contradomínio de ϕ' restringida a uma vizinhança de 0 contém $[-1,1]$.