Análise Matemática I

2º Teste e 1º Exame

Campus da Alameda — **9 de Janeiro de 2006, 13 horas**

Licenciaturas em
Engenharia do Ambiente, Engenharia Biológica, Engenharia Civil,
Engenharia e Arquitectura Naval, Engenharia do Território,
Engenharia Química, Química

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

1º exame

Para realizar o 2º teste resolva exclusivamente as perguntas no verso

(5,0) I. Considere:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : |x| \geq \frac{x}{2} + 1 \right\}, \qquad B = [-1, 3[\,.$$

a) Mostre que $A \cap B = \left[-1, -\frac{2}{3}\right] \cup [2, 3[$.

b) Indique, se existirem em $\mathbb{R}$, $\sup A$, $\min(A \cap B)$, $\max(A \cap B)$, $\min((A \cap B) \setminus \mathbb{Q})$ e $\max(A \cap B \cap \mathbb{Q})$.

c) Decida justificadamente quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas:

i) Toda a sucessão monótona de termos em $A \cap B$ tem limite em $A \cap B$.

ii) Toda a sucessão decrescente de termos em $A \cap B$ tem um limite negativo.

iii) Se $F : A \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e (x_n) uma sucessão de termos em $[-1, -2/3]$, então a sucessão $(F(x_n))$ tem uma subsucessão convergente (em $\mathbb{R}$).

(5,0) II. 1. Seja (u_n) uma sucessão real, com termo geral dado por

$$u_n = \frac{3^n + n}{n^3}.$$

Determine os seguintes limites em $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\text{a) } \lim u_n, \qquad \text{b) } \lim \sqrt[n]{u_n}.$$

2. Calcule a soma da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-2n}.$$

2º teste e continuação do 1º exame

(4,5) III. 1. Calcule:

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{\operatorname{sen}(x^2)}, \qquad \text{b) } \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{e^{1/x}}.$$

2. Decida da convergência ou divergência de cada uma das seguintes séries:

$$\text{a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n! - \operatorname{sen} n}, \qquad \text{b) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}.$$

3. Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a seguinte série converge absolutamente, simplesmente ou diverge:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(nx)^n}{(n+1)^n}.$$

(4,0) IV. 1. Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \varphi(e^x), \qquad g(x) = \varphi(\operatorname{sen} x).$$

Mostre que

$$f'(0) + g'(\pi/2) = \varphi'(1).$$

2. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = x + 2 \operatorname{arctg} |x|$$

a) Calcule ou mostre que não existem

$$\lim_{x\to-\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

b) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e calcule a derivada f'.

c) Determine os intervalos de monotonia de f e, se existirem, pontos de extremo relativo, classificando-os quanto a serem máximos, mínimos, relativos ou absolutos.

d) Determine o contradomínio da restrição de f ao intervalo $]-\infty, 0]$.

(1,5) V. Decida se a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)\right).$$

é ou não convergente.

Sugestão: Poderá ser útil uma aplicação do teorema de Lagrange.

Resolução

I. a) Uma vez que

$$\begin{aligned}|x| \geq \frac{x}{2}+1 \quad &\Leftrightarrow \quad \Big(x \geq 0 \ \wedge \ x \geq \frac{x}{2}+1\Big) \quad \vee \quad \Big(x \leq 0 \ \wedge \ -x \geq \frac{x}{2}+1\Big)\\ &\Leftrightarrow \quad x \geq 2 \quad \vee \quad x \leq -\frac{2}{3},\end{aligned}$$

vem

$$A = \left]-\infty, -2/3\right] \cup \left[2, +\infty\right[$$

e, consequentemente,

$$A \cap B = [-1, -2/3] \cup \left[2, 3\right[.$$

b) Tem-se

$$\min(A \cap B) = -1$$

e não existem $\sup A$ (pois o conjunto de majorantes de A é vazio), $\max(A \cap B)$ (pois $\sup(A \cap B) = 3 \notin A \cap B$), $\min((A \cap B) \setminus \mathbb{Q})$ (pois $\inf((A \cap B) \setminus \mathbb{Q}) = -1 \notin \mathbb{Q}$) e $\max(A \cap B \cap \mathbb{Q})$ (pois $\sup(A \cap B \cap \mathbb{Q}) = 3 \notin A \cap B \cap \mathbb{Q}$).

c) i. Falso. Considere-se, por exemplo, $y_n = 3 - \frac{1}{n}$.

ii. Falso. Tome-se, por exemplo, $z_n = 2 + \frac{1}{2n}$.

iii. Verdadeiro. Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass (x_n) possui uma subsucessão convergente com limite em $[-1, -\frac{2}{3}]$. Designemos o limite dessa sucessão por x. A continuidade de F garante que as imagens por F dos termos dessa subsucessão convergem para $F(x)$.

II. 1) a) $\lim \frac{3^n+n}{n^3} = \lim \frac{1+n3^{-n}}{n^3 3^{-n}} = +\infty$.

b) Uma vez que

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \frac{n^3}{(n+1)^3} \frac{3^{n+1}+n+1}{3^n+n} = \lim \frac{1+(n+1)3^{-n-1}}{1/3+n3^{-n-1}} = 3$$

tem-se também

$$\lim \sqrt[n]{u_n} = 3.$$

2) Trata-se de uma série geométrica de razão $-e^{-2}$ e primeiro termo $-e^{-2}$. Como $|-e^{-2}| < 1$ a série é convergente com soma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-e^{-2})^n = -\frac{e^{-2}}{1+e^{-2}} = -\frac{1}{e^2+1}.$$

III. 1) a) Usando a regra de Cauchy

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{\operatorname{sen}(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{2x\cos(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(1+x^2)\cos(x^2)} = 1.$$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{e^{1/x}} = +\infty$, em que se usou $\lim_{x\to+\infty} e^{1/x} = 1$ e $\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty$.

2) a) Seja $a_n = \frac{2^n}{n! - \operatorname{sen} n}$. Note-se que $a_n > 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}_1$ e

$$\begin{aligned}\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim \frac{2^{n+1}}{(n+1)! - \operatorname{sen}(n+1)} \frac{n! - \operatorname{sen} n}{2^n} \\ &= \lim 2 \frac{\frac{1}{n+1} - \frac{\operatorname{sen} n}{(n+1)!}}{1 - \frac{\operatorname{sen}(n+1)}{(n+1)!}} = 0 < 1\end{aligned}$$

pelo que o critério de D'Alembert garante a convergência da série $\sum a_n$.

b) $\sum (-1)^n \frac{1}{\log n}$ é uma série alternada, da forma $\sum (-1)^n a_n$, com $a_n = \frac{1}{\log n}$ definindo uma sucessão decrescente e com limite 0. Logo, pelo critério de Leibniz, a série converge.

3) Tem-se

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(nx)^n}{(n+1)^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

com $b_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. Portanto trata-se de uma série de potências cujo raio de convergência pode ser calculado por

$$r = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{b_n}} = \frac{1}{\lim \frac{n}{n+1}} = 1.$$

Logo a série converge absolutamente para $|x| < 1$ e diverge para $|x| > 1$. Para $x = \pm 1$ a série é também divergente pois os termos gerais das séries numéricas resultantes não convergem para 0, uma vez que

$$\lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-1}.$$

IV. 1) Usando o teorema da derivação da função composta, tem-se

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \varphi'(e^x), \\ g'(x) &= \cos x \, \varphi'(\operatorname{sen} x). \end{aligned}$$

Assim

$$f'(0) + g'(\pi/2) = \varphi'(1) + 0\, \varphi'(1) = \varphi'(1).$$

2) a) Uma vez que $\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg} |x| = \pi/2$, tem-se

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

b) Em vizinhanças suficientemente pequenas de um ponto de abcissa positiva ou de um ponto de abcissa negativa a função coincide ou com $x + 2 \operatorname{arctg} x$ ou com $x - 2\operatorname{arctg} x$ que são funções cuja diferenciabilidade decorre da diferenciabilidade das funções polinomiais, da diferenciabilidade da função arctg, e dos teoremas sobre soma e produto de funções diferenciáveis. Tem-se assim

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{1+x^2}, & \text{se } x > 0, \\ 1 - \frac{2}{1+x^2}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Além disso,

$$f'_e(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{h - 2\operatorname{arctg} h}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1 - \frac{2}{1+h^2}}{1} = -1,$$
$$f'_d(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{h + 2\operatorname{arctg} h}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1 + \frac{2}{1+h^2}}{1} = 3,$$

pelo que f não é diferenciável em $x = 0$. Assim o domínio de diferenciabilidade de f é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

c) Para $x > 0$ tem-se $f'(x) > 0$ e f é contínua em 0, pelo que f é estritamente crescente em $[0, +\infty[$.
Para $x < 0$ tem-se $f'(x) = 0$ sse $1 - \frac{2}{1+x^2} = 0$, isto é, $x^2 = 1$ e portanto $x = -1$ é um ponto de estacionaridade. Além disso $f'(x) > 0$ se $x < -1$, $f'(x) < 0$ se $x \in\,]-1, 0[$ e f é contínua em 0 pelo que f é estritamente crescente em $]-\infty, -1]$ e estritamente decrescente em $[-1, 0]$.
Juntamente com os resultados da alínea (a) concluímos também que -1 é um ponto de máximo relativo (não absoluto) e 0 é um ponto de mínimo relativo (não absoluto).

d) Da continuidade de f, de $]-\infty, 0]$ ser um intervalo e do teorema do valor intermédio decorre que $f(]-\infty, 0])$ é um intervalo. Dos resultados das alíneas (a) e (c) conclui-se que $f(]-\infty, 0]) =]-\infty, f(-1)] =]-\infty, -1 + \pi/2]$.

V. Sendo a função sh diferenciável e crescente em $]0, +\infty[$ podemos usar o teorema de Lagrange para estimar, para $0 < \beta < \alpha$,

$$0 < \operatorname{sh}\alpha - \operatorname{sh}\beta \leq (\alpha - \beta) \sup_{\theta \in]\alpha,\beta[} \operatorname{ch}\theta.$$

Considerando $\alpha = \frac{1}{\sqrt{n}}$ e $\beta = \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ obtemos, para n suficientemente grande (usando a continuidade em 0 do ch e os argumentos do sh tenderem para 0),

$$0 < \operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right) \leq \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}+1}\right) 2\operatorname{ch} 0 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}+1}\right).$$

Assim, para n suficientemente grande,

$$0 < \frac{1}{n}\left(\operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)\right) \leq \frac{2}{n\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)} \leq \frac{2}{n^2}.$$

Esta estimativa permite usar o critério geral de comparação para garantir a convergência da série em estudo a partir da convergência de $\sum 1/n^2$.

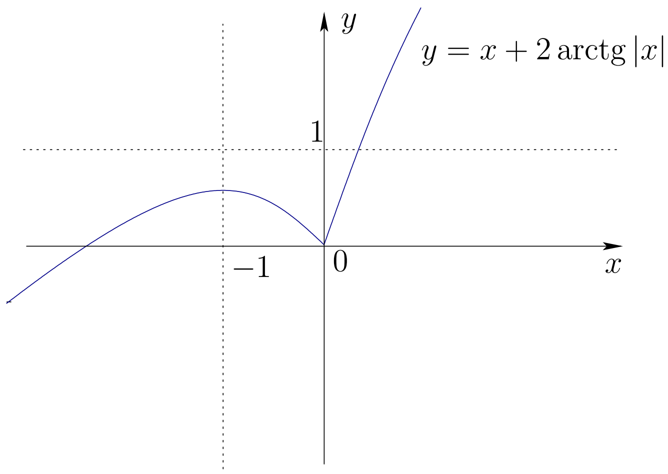

Figura 1: Detalhe gerado numericamente do gráfico da função f do exercício IV.2. Note as derivadas laterais em 0, o máximo e o mínimo locais, o crescimento, etc.