Análise Matemática I

1ª data de Exame

Campus de Lisboa (Alameda) **17 de Janeiro de 2001, 17 horas**

Licenciatura em Engenharia Informática e de Computadores

Resolução e alguns comentários

I. 1. A função h real de variável real definida por

$$h(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(xe^x), & \text{se } x > 0, \\ a\log(e^{x^2} + x) + b, & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$

é diferenciável em $]0, +\infty[$ e $]-\infty, 0[$ valendo aí as regras de derivação usuais. Em particular

$$h'(x) = \begin{cases} (e^x + xe^x)\cos(xe^x), & \text{se } x > 0, \\ a(2xe^{x^2} + 1)\frac{1}{e^{x^2}+x}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Para termos diferenciabilidade na origem é condição necessária que a função seja contínua em 0. Como

$$h(0) = a\log(e^0 + 0) + b = a\log(1) + b = b$$

e

$$\lim_{x\to 0+} h(x) = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(xe^x) = 0$$

concluímos que devemos ter $b = 0$.

Para a derivada existir na origem é necessário e suficiente que as derivadas laterais em 0 existam e sejam iguais. Ora

$$h'_d(0) = \left(\frac{d}{dx}(\operatorname{sen}(xe^x))\right)\Big|_{x=0} = \left((e^x + xe^x)\cos(xe^x)\right)\big|_{x=0} = (e^0 + 0e^0)\cos(0e^0) = 1,$$

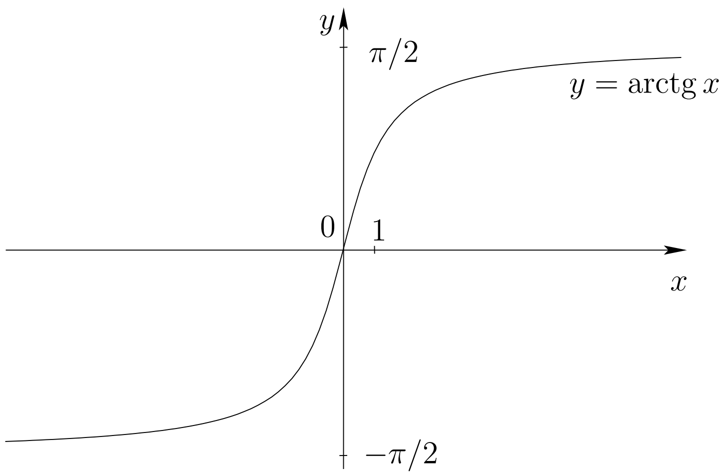
$$h'_e(0) = \left(\frac{d}{dx}(ae^{x^2} + x)\right)\Big|_{x=0} = \left(a(2xe^{x^2} + 1)\frac{1}{e^{x^2} + x}\right)\Big|_{x=0} = a.$$

pelo que a função é diferenciável na origem se e só se $b = 0$ e $a = 1$. Assim

$$h'(x) = \begin{cases} (e^x + xe^x)\cos(xe^x), & \text{se } x \geq 0, \\ (2xe^{x^2} + 1)\frac{1}{e^{x^2}+x}, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Comentário. Este problema testa essencialmente o cálculo de derivadas usando o teorema de derivação da função composta, a relação entre continuidade e diferenciabilidade e a relação entre existência de derivadas laterais iguais e diferenciabilidade.

2. *Comentário.* Várias das perguntas desta prova referem-se à função arctg e aqui é talvez o local indicado para rever o que é essencial sobre esta função. O arctg é a função inversa da tg restrita ao intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$. Segue de propriedades bem conhecidas da função tg que $\operatorname{arctg}(1) = \pi/4$, $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$,..., que arctg é uma função ímpar de classe C^∞ com derivada $\frac{1}{1+x^2}$,... Um esboço do seu gráfico é



a) $\displaystyle \lim_{n\in\mathbb{N}, n\to+\infty} \frac{1}{\operatorname{arctg} n} = \frac{2}{\pi}$.

b) $\displaystyle \lim_{n\in\mathbb{N}, n\to+\infty} \frac{1}{\operatorname{arctg} n - \pi/2} = -\infty$.

c) Podemos aplicar a regra de Cauchy para obter

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{\operatorname{arctg} x - \pi/2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1/x^2}{1/(1+x^2)} = -1.$$

3. De acordo com a alínea anterior todas as séries têm um termo geral que não tende para 0 quando $n \to \infty$ pelo que são divergentes.

4. Consideramos os conjuntos A e B definidos por

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{\log(x-1)}{x+1} > 0 \right\}, B = \left\{ x \in [-1,1] : 0 < |\operatorname{arcsen} x| \leq \frac{\pi}{3} \right\}.$$

a) $A =]2, +\infty[$ e $B = \left[-\sqrt{3}/2, 0\right[\cup \left]0, \sqrt{3}/2\right]$.

b) Como A não é limitado superiormente $\sup A$ não exite. Como $\sqrt{3} < 2$ temos $A \cap B = \emptyset$ e $\inf(A\cap B)$ não existe. Como $\sqrt{3}/2$ é irracional $\sup(B\cap\mathbb{Q}) = \sqrt{3}/2$ mas $\max(B\cap\mathbb{Q})$ não existe.

c) A sucessão de termo geral $(1/n)_{n\in\mathbb{N}_1} \subset B$ é monótona e tem limite $0 \notin B$.

d) A função $g : B \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 1/x$ é contínua mas não é limitada pois $\lim_{x\to 0^\pm} g(x) = \pm\infty$.
Se existir $\lim_{x\to 0^+} g(x) = L \in \mathbb{R}$ então a definição de limite implica que existe uma vizinhança direita de 0 onde g é limitada, isto é, existe $\delta > 0$ tal que $x \in]0, \delta[\Longrightarrow |g(x)| < 2|L|$. Aplicando o teorema de Weierstrass a g em $[\delta, \sqrt{3}/2]$ (g é contínua) concluímos que g é limitada em $]0, \sqrt{3}/2]$. O mesmo raciocínio é válido em $[-\sqrt{3}/2, 0[$.

II. 1. a) A função definida por

$$g(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

está definida para $x \neq -1$ e tem por domínio de diferenciabilidade o mesmo conjunto. Para justificar esta afirmação nota-se que: arctg é uma função indefinidamente diferenciável definida em $\mathbb{R}$; a aplicação $x \mapsto \frac{x}{x+1}$ está definida para $x \neq -1$ e também é indefinidamente diferenciável; o teorema de derivação da função composta implica que a composição da segunda com a primeira das funções referidas atrás é indefinidamente diferenciável para $x \neq -1$.
O cálculo de g' usando o teorema de derivação da função composta conduz a

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{1+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2} \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+1}\right) \\ &= \frac{(x+1)^2}{(x+1)^2+x^2} \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2+x^2}. \end{aligned}$$

b) Como

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{y\to -\infty} \operatorname{arctg}(y) = -\pi/2$$

e

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{y\to +\infty} \operatorname{arctg}(y) = \pi/2$$

não existem assímptotas verticais no ponto $x = -1$.
Como

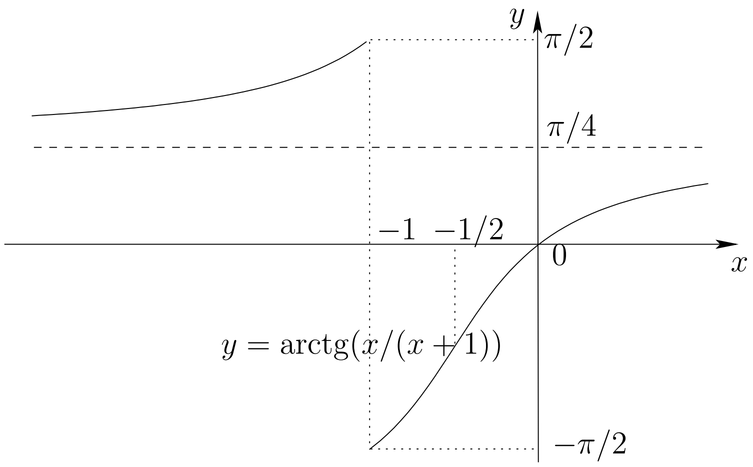
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pi/4$$

a recta $y = \pi/4$ é uma assímptota não vertical tanto à esquerda como à direita.

c) Como $g' > 0$ não existem pontos de extremo local e a função é estritamente crescente em cada um dos intervalos $]-\infty, -1[$ e $]-1, +\infty[$.
Para determinar o sentido da concavidade do gráfico calculamos

$$g''(x) = -\frac{2(x+1)+2x}{((x+1)^2+x^2)^2} = -\frac{4x+2}{((x+1)^2+x^2)^2}$$

pelo que concavidade do gráfico estará virada para cima se $x < -1/2$ e para baixo se $x > 1/2$, sendo $x = -1/2$ um ponto de inflexão.



Reunindo todas estas características de g um esboço do gráfico será similar ao que se segue

2. a) Como
$$x^{1/(e^x+1)} = e^{\frac{\log x}{e^x+1}}$$
começamos por considerar o limite
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{e^x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{e^x} = 0$$
por aplicação da regra de Cauchy. Então
$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/(e^x+1)} = e^0 = 1.$$

b) Usando os desenvolvimentos de MacLaurin do cos e da exponencial e a continuidade das séries de potências
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots}{x(x + \frac{x^2}{2} + \dots)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2} + \frac{x^2}{4!} - \dots}{1 + \frac{x}{2} + \dots} = -1/2.$$

3. Como
$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^4 (e^{1/\lambda^2} - P(1/\lambda)) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - P(x)}{x^4}$$
o polinómio P terá de ser o polinómio de MacLaurin de quarto grau relativo à função $x \mapsto e^{x^2}$. Este obtém-se facilmente do da exponencial substituindo x por x^2. Assim
$$P(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2}.$$

4. Para determinar a série de Taylor de potências de x (série de MacLaurin) relativa à função $F(x) = \operatorname{sen} x + \frac{1}{(x-1)^2}$ e o maior intervalo em que a série representa a função começamos por notar que

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1}, \quad \text{para todo o } x \in \mathbb{R}$$

Por outro lado sabemos que uma série de potências é diferenciável por diferenciação termo a termo no interior do seu intervalo de convergência donde

$$\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1}, \quad \text{para } |x| < 1.$$

Assim a série de Mac-Laurin de $F(x)$ obtém-se da soma das duas séries obtidas e representa a função para $|x| < 1$.

III. a) Suponha-se que f é holderiana em x_0. Vamos verificar que f é contínua em x_0. Seja $\epsilon > 0$. Escolha-se $0 < \delta < \left(\frac{\epsilon}{C}\right)^{1/p}$ e tal que

$$(|x - x_0| < \delta, x \in A) \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|^p.$$

Então

$$(|x - x_0| < \delta, x \in A) \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|^p < \epsilon.$$

Portanto f é contínua em x_0.

b) Neste caso, para $|x - x_0| < \epsilon$

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| \leq C|x - x_0|^{p-1}$$

de maneira que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0.$$

e portanto $f'(x_0) = 0$.

c) O facto de f ser diferenciável em qualquer ponto garante que existe o limite da razão incremental que define a derivada. A existência do limite implica que a razão incremental é limitada numa vizinhança de cada ponto, isto é, para cada $x_0 \in A$ existe $\epsilon > 0$ e $C > 0$ tais que para $|x - x_0| < \epsilon$ temos

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| \leq C.$$

Mas isto quer dizer que f é holderiana com expoente 1.

d) Consideremos que f não é holderiana em x_0. Em particular não é holderiana com expoente $1/2$. Qualquer que seja o $C > 0$ e o $\epsilon > 0$ existem $x \neq x_0$ com $|x - x_0| < \epsilon$ tal que

$$\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^{1/2}} > C.$$

Isto permite construir uma sucessão $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to x_0$ e qualquer que seja o $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{|f(x_n) - f(x_0)|}{|x_n - x_0|^{1/2}} > C.$$

Mas então

$$\frac{|f(x_n) - f(x_0)|}{|x_n - x_0|} > \frac{C}{|x_n - x_0|^{1/2}}$$

e portanto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|f(x_n) - f(x_0)|}{|x_n - x_0|} = +\infty$$

Mostrando que não existe derivada em x_0.

Considere-se $h :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\log x}, & \text{se } x \in]0, 1[, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ \frac{1}{\log(-x)}, & \text{se } x \in]-1, 0[. \end{cases}$$

É fácil de verificar usando a regra de Cauchy que qualquer que seja $p > 0$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{h(x)}{|x|^p} = +\infty$$

e que portanto h não é holderiana na origem.

Comentário. Para obter o exemplo na última alínea comece por notar que um exemplo seria a função inversa de uma função cujo gráfico estivesse "por baixo" de qualquer polinómio perto de 0...