Análise Matemática I

1º Teste

12 de Novembro de 2005 **11 horas**

Licenciaturas em
Engenharia do Ambiente, Engenharia Biológica, Engenharia Civil
Engenharia e Arquitectura Naval, Engenharia Química, Engenharia do Território, Química

---

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(9,0) I. 1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x : x \geq 0 \ \wedge \ \frac{x^4-4}{|x-1|} \leq 0 \right\}, \ B = \{x : x \geq 0 \ \wedge \ \exists_{k \in \mathbb{N}} kx \notin \mathbb{Q}\}.$$

a) Mostre que $A = \left[0, \sqrt{2}\right] \setminus \{1\}$ e justifique que $B = [0, +\infty[\setminus \mathbb{Q}$.

b) Determine ou mostre que não existem, os supremo, máximo, ínfimo e mínimo de cada um dos conjuntos A e $A \setminus B$.

c) Decida justificadamente quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas:

i) Toda a sucessão crescente e de termos em A tem um limite em $\mathbb{R}$.

ii) Existe uma sucessão de termos em A com limite no complementar de A.

iii) Existem séries convergentes com termos em A.

2. Considere a sucessão real (u_n) dada por:

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_n = 1 + \frac{u_{n-1}}{2}, \quad \text{se } n > 0. \end{cases}$$

a) Mostre usando indução que $u_n \leq 2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

b) Mostre que (u_n) é uma sucessão crescente.

c) Mostre que (u_n) é convergente e indique $\lim u_n$.

(9,0) II. 1. Estude a existência e, se for o caso, o valor em $\overline{\mathbb{R}}$ de cada um dos seguintes limites:

$$\text{a) } \lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^n(2n+2)}{3n-1}, \qquad \text{b) } \lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{2n^{1/2}+2}{3n^{1/2}-1}}, \qquad \text{c) } \lim_{n \to +\infty} \frac{(2n)!+2}{(3n)!-1}.$$

2. Determine se as seguintes séries são convergentes e calcule, sempre que possível, a sua soma:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n!}{n!+1} - \frac{(n+1)!}{(n+1)!+1} \right), \qquad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 3^{-2n}.$$

(2,0) III. Sejam (a_n) uma sucessão limitada e com termos em $]1, +\infty[$ e (b_n) uma outra sucessão verificando

$$b_n = \frac{n a_n}{n + a_n}, \qquad n \in \mathbb{N}_1.$$

1. Prove que (b_n) tem subsucessões convergentes.
2. Prove que $\sum b_n$ é uma série divergente.

Resolução

I. 1. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ x : x \geq 0 \ \wedge \ \frac{x^4 - 4}{|x-1|} \leq 0 \right\}, \ B = \{x : x \geq 0 \ \wedge \ \exists_{k \in \mathbb{N}} kx \notin \mathbb{Q}\}.$$

a) Mostre que $A = \left[0, \sqrt{2}\right] \setminus \{1\}$ e justifique que $B = [0, +\infty[\setminus \mathbb{Q}$.

Começamos por notar que

$$\begin{aligned}
\frac{x^4 - 4}{|x-1|} \leq 0 &\Leftrightarrow \frac{(x^2-2)(x^2+2)}{|x-1|} \leq 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 - 2 \leq 0 \ \wedge \ |x-1| \neq 0 \quad (\text{porque } x^2 + 2 > 0 \text{ e } |x-1| \geq 0) \\
&\Leftrightarrow x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] \setminus \{1\}.
\end{aligned}$$

Então,

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \ \wedge \ x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right] \setminus \{1\} \right\} = \left[0, \sqrt{2}\right] \setminus \{1\}.$$

Relativamente a B começamos por notar que se existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $kx \notin \mathbb{Q}$ então $x \notin \mathbb{Q}$ pois, caso contrário, $kx \in \mathbb{Q}$ para todo o $k \in \mathbb{N}$. Portanto $B \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Reciprocamente, se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ então $1 \cdot x = x \notin \mathbb{Q}$. Portanto B é de facto o conjunto dos números irracionais positivos.

b) Determine ou mostre que não existem, os supremo, máximo, ínfimo e mínimo de cada um dos conjuntos A e $A \setminus B$.

Notamos que $A \setminus B = \left(\left[0, \sqrt{2}\right[\setminus \{1\}\right) \cap \mathbb{Q}$. Então,

$$\sup A = \sup A \setminus B = \sqrt{2} = \max A,$$
$$\inf A = \inf A \setminus B = 0 = \min A = \min A \setminus B.$$

$A \setminus B$ não tem máximo pois $\sup A \setminus B = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

c) Decida justificadamente quais das seguintes proposições são verdadeiras e quais são falsas:

i) Toda a sucessão crescente e de termos em A tem um limite em $\mathbb{R}$.

A afirmação é verdadeira pois como A é limitado a sucessão será crescente e majorada e portanto convergente (ver teorema das sucessões monótonas e limitadas).

ii) Existe uma sucessão de termos em A com limite no complementar de A.

A afirmação é verdadeira pois uma tal sucessão pode ser definida por $x_n = 1 - \frac{1}{n}$ que tem termos em A com $\lim x_n = 1 \notin A$.

iii) Existem séries convergentes com termos em A.

A afirmação é verdadeira. Considere-se, por exemplo, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$.

2. Considere a sucessão real (u_n) dada por:

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_n = 1 + \frac{u_{n-1}}{2}, \quad \text{se } n > 0. \end{cases}$$

a) Mostre usando indução que $u_n \leq 2$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 0$ temos $u_0 = 1 \leq 2$. Supondo $u_n \leq 2$ para uma certo $n \in \mathbb{N}$, consideremos u_{n+1}:

$$u_{n+1} = 1 + \frac{u_n}{2} \leq 1 + \frac{2}{2} = 2.$$

Por indução conclui-se que $u_n \leq 2$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

b) Mostre que (u_n) é uma sucessão crescente.

Com $n \geq 0$ e tendo em conta a alínea (a):

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{u_n}{2} - u_n = 1 - \frac{u_n}{2} \geq 1 - \frac{2}{2} = 0$$

e portanto (u_n) é uma sucessão crescente.

c) Mostre que (u_n) é convergente e indique $\lim u_n$.

De (a) e (b) decorre que (u_n) é crescente e majorada, pelo que é convergente. Da definição de (u_n) segue que

$$\lim u_n = 1 + \frac{\lim u_n}{2}.$$

Resolvendo a equação em ordem a $\lim u_n$, obtem-se $\lim u_n = 2$.

(9,0) II. 1. Estude a existência e, se for o caso, o valor em $\overline{\mathbb{R}}$ de cada um dos seguintes limites:

$$\text{a)} \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n(2n+2)}{3n-1}, \qquad \text{b)} \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2n^{1/2}+2}{3n^{1/2}-1}}, \qquad \text{c)} \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!+2}{(3n)!-1}.$$

a)

$$\frac{(-1)^{2n}(2(2n)+2)}{3(2n)-1} = \frac{(4n+2)}{6n-1} = \frac{(4+2/n)}{6-1/n} \to \frac{2}{3},$$
$$\frac{(-1)^{2n+1}(2(2n+1)+2)}{3(2n+1)-1} = -\frac{(4n+4)}{6n+2} = -\frac{(4+4/n)}{6+2/n} \to -\frac{2}{3}.$$

Assim a sucessão possui subsucessões com limites distintos (em particular a subsucessão dos termos de ordem par e a subsucessão dos termos de ordem ímpar) e portanto é divergente.

b)

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2n^{1/2}+2}{3n^{1/2}-1}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{2+2n^{-1/2}}{3-n^{-1/2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

c) Note-se que

$$\frac{(2n)!+2}{(3n)!-1} = \frac{1+\frac{2}{(2n)!}}{\frac{(3n)!}{(2n)!} - \frac{1}{(2n)!}}.$$

Além disso[1],

$$\frac{(3n)!}{(2n)!} = (3n)(3n-1)(3n-2)\dots(2n+1) \to +\infty.$$

Assim

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!+2}{(3n)!-1} = 0.$$

[1]Em alternativa seja $\beta_n = \frac{(3n)!}{(2n)!}$. Então $\beta_{n+1}/\beta_n = (3n+3)(3n+2)(3n+1)/(2n+2)(2n+1) \to +\infty$ pelo que $\beta_n \to +\infty$.

2. Determine se as seguintes séries são convergentes e calcule, sempre que possível, a sua soma:

$$\text{a)} \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n!}{n!+1}-\frac{(n+1)!}{(n+1)!+1}\right), \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 3^{-2n}.$$

a) A série tem a forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n-\alpha_{n+1}) \qquad \text{com } \alpha_n=\frac{n!}{n!+1}.\ \text{Trata-se de uma série de Mengoli.}$$

O termo de ordem n da respectiva sucessão das somas parciais é

$$\alpha_1-\alpha_{n+1}=\frac{1!}{1!+1}-\frac{(n+1)!}{(n+1)!+1}\to\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$$

em que se usou

$$\lim\frac{(n+1)!}{(n+1)!+1}=\lim\frac{1}{1+1/(n+1)!}=1.$$

Portanto a série converge, com soma $-1/2$.

b) Como

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 3^{-2n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-3^{-2})^n$$

trata-se de uma série geométrica com primeiro termo $-1/9$ e razão $-1/9$. Como a razão tem módulo menor que 1 a série converge, com soma dada por

$$-\frac{1}{9}\,\frac{1}{1-(-1/9)}=-\frac{1}{10}.$$

(2,0) III. Sejam (a_n) uma sucessão limitada e com termos em $]1,+\infty[$ e (b_n) uma outra sucessão verificando

$$b_n=\frac{na_n}{n+a_n}, \qquad n\in\mathbb{N}_1.$$

1. Prove que (b_n) tem subsucessões convergentes.

Seja M um majorante de a_n. Então $1<a_n\leq M$ para todo o $n\in\mathbb{N}$. Daí que

$$0<b_n=\frac{na_n}{n+a_n}\leq\frac{nM}{n+1}<M.$$

Portanto (b_n) é uma sucessão limitada e, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, possui subsucessões convergentes.

2. Prove que $\sum b_n$ é uma série divergente.

Por um lado

$$b_n=\frac{na_n}{n+a_n}>\frac{n}{n+M}\to 1. \tag{1}$$

Por outro para $\sum b_n$ ser convergente a condição necessária de convergência de séries implica

$$b_n\to 0. \tag{2}$$

Conjuntamente (1) e (2) implicam $0\geq 1$ o que é impossível. Logo $\sum b_n$ é uma série divergente.