Análise Matemática I

1º Teste

Campus da Alameda — **30 de Novembro de 2002**

LEEC, LEC, LET, LCI, LEGI, LEN, LQ, LEQ, LEB, LEAmb, LEAero

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

I. Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2| \leq 2x + 1\} \qquad B = \mathbb{Q} \qquad C = \left\{ \frac{1}{k^2} : k \in \mathbb{N}_1 \right\}.$$

a) Mostre que $A = [-1 + \sqrt{2}\,,\, 3]$.

b) Determine, se existirem, o supremo, ínfimo, máximo e mínimo dos conjuntos $A \cap B$ e C.

c) Decida se as seguintes proposições são verdadeiras ou falsas, justificando apropriadamente (demonstre ou dê um exemplo, conforme adequado).

i) Toda a sucessão monótona, de termos em A, é convergente.

ii) Existem sucessões $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de termos em $A^c = \mathbb{R} \setminus A$, convergentes, satisfazendo

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad a_{n+1}\, a_n < 0.$$

iii) Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sucessão divergente de termos em C. Então, qualquer subsucessão de a_n é também divergente.

II. 1. Estude a natureza (convergência simples, absoluta ou divergência) das seguintes séries e calcule a soma de uma delas:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \sqrt{n}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(5 + (-1)^n)^n}$

2. Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a seguinte série de potências converge absolutamente, simplesmente ou diverge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, (x-2)^n}{n+2}.$$

III. Sejam $(u_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$ e $(v_n)_{n \in \mathbb{N}_1}$ sucessões de termos positivos, satisfazendo a condição

$$\forall_{n \in \mathbb{N}_1} \quad |u_n - v_n| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Mostre que, se a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ diverge, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ também diverge.

Respostas

I. a) **Uma solução puramente analítica** Dividimos a inequação, consoante o sinal da expressão dentro do módulo.
Para $x^2 - 2 \leq 0$, ou seja, quando $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$, temos

$$-x^2 + 2 \leq 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 \geq 0.$$

As raízes do polinómio de segundo grau $x^2 + 2x - 1$ são, pela fórmula resolvente, $x = -1 \pm \sqrt{2}$ e ele é portanto positivo em $]-\infty, -1-\sqrt{2}] \cup [-1+\sqrt{2}, +\infty[$. Fazendo a intersecção deste conjunto com a nossa condição inicial $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, obtemos $[-1+\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.
Agora, no outro caso, quando $x^2 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$, teremos a inequação

$$x^2 - 2 \leq 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 \leq 0.$$

As raízes do polinómio $x^2 - 2x - 3$ são agora $x = 1 \pm 2$. O polinómio tem valores negativos entre as raízes, ou seja no conjunto $[-1, 3]$, o que intersectado com o conjunto $]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$ permite obter a solução, neste caso, $[\sqrt{2}, 3]$.
Reunindo as soluções dos dois casos, isto é, $[-1+\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, 3]$, obtemos a solução final indicada.

Uma solução obtida via um esboço auxiliar Uma solução alternativa (ou um método de verificar a solução acima) pode ser obtida por esboço gráfico. A solução da inequação consiste no conjunto dos pontos pontos x tais que o gráfico de $y = |x^2 - 2|$ está "acima" do gráfico de $y = 2x + 1$ no referencial ortonormal usual.
O gráfico de $y = 2x + 1$ é uma recta de declive 2 e cuja ordenada na origem é 1. O gráfico de $y = x^2 - 2$ é uma parábola com concavidade virada para cima, simétrico em relação ao eixo dos yy, que intersecta o eixo dos xx em $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ e tem o seu ponto de ordenada mínima em $(0, -2)$. O gráfico de $y = |x^2 - 2|$ obtém-se por reflexão da parte do gráfico entre -2 e 2 relativamente ao eixo dos xx (ver figura 1). Os dois gráficos intersectam-se exactamente em dois pontos: um ponto com abcissa em $]0, \sqrt{2}[$ e que corresponde à solução do sistema

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = -(x^2 - 2) \end{cases}$$

naquele intervalo e outro ponto com abcissa em $]\sqrt{2}, +\infty[$ que corresponde à solução do sistema

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = x^2 - 2 \end{cases}$$

neste último intervalo. O intervalo fechado com extremos nessas duas abcissas é a solução da desigualdade. Os cálculos do valor exacto das abcissas decorrem como na solução analítica[1].

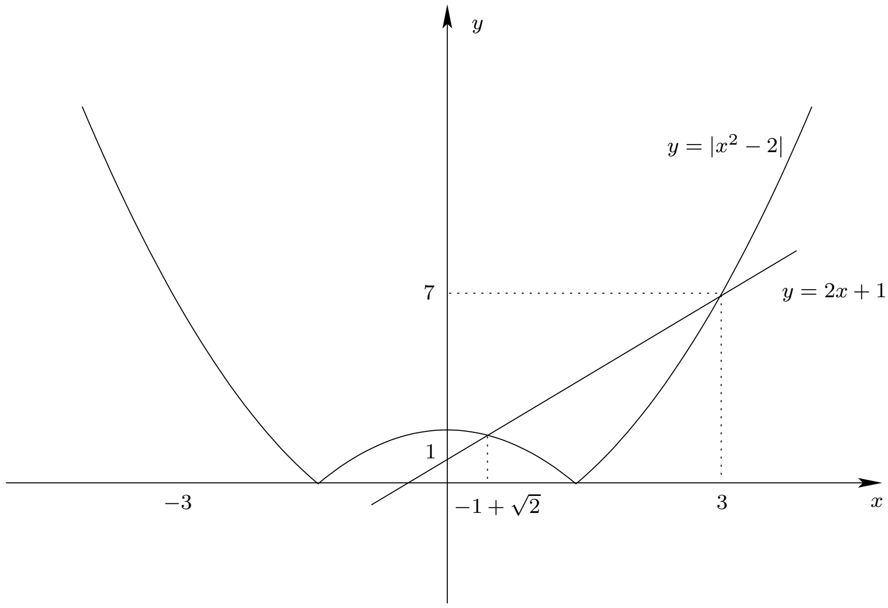

Figura 1: Estudando graficamente a desigualdade $|x^2 - 2| \leq 2x + 1$.

b) O conjunto $A \cap B$ é formado por todos os racionais no intervalo $[-1 + \sqrt{2}\,,\, 3]$. O ponto $x = -1 + \sqrt{2}$ é claramente irracional (em caso contrário, se fosse racional, somado a 1 teria que dar um número racional — porque a soma de dois racionais ainda é racional — mas neste caso isso seria falso visto sabermos que o resultado daria $\sqrt{2}$, que é irracional). Portanto $-1 + \sqrt{2} \notin A \cap B$. Assim, o supremo do conjunto é 3 e é também máximo porque pertence-lhe. O ínfimo é $-1 + \sqrt{2}$ mas o conjunto não tem mínimo porque, como acabámos de justificar, este ínfimo não lhe pertence.

O conjunto C é formado pelas fracções da forma $1/k^2$, com k inteiro positivo. O número $x = 1$, que corresponde a $k = 1$, é um majorante e, pertencendo ao conjunto, é também máximo e supremo. Claramente 0 é um minorante porque todos os termos de C são positivos. Para mostrar que 0 é de facto o ínifimo, basta notar que se o ínfimo fosse um número real $\epsilon > 0$, seria possível determinar k inteiro, suficientemente grande (pela propriedade arquimediana) de modo a ter-se

[1]Note-se que embora o gráfico apresentado tenha algum rigor numérico a localização das raízes decorre unicamente de propriedades qualitativas do mesmo (localização de zeros, declive da recta, sentido de concavidades, sinal, etc.) e de um pequeno número de valores em pontos importantes. Um esboço muito mais impreciso permitiria chegar às mesmas conclusões. Note-se também que as escalas nos dois eixos diferem.

$1/k^2 < \epsilon$ e então ϵ não seria um minorante. Conclui-se portanto que 0 é o máximo dos minorantes de C, ou seja, o seu ínfimo. Como 0 não pertence a C, não existe mínimo.

c) i) **Verdadeira.** O conjunto A é limitado. Um majorante é por exemplo o 3 que, neste caso, é o mínimo dos majorantes e por isso é também o supremo. Um minorante é por exemplo o $-1+\sqrt{2}$ que, sendo o máximo de todos os minorantes, é também o ínfimo. Qualquer sucessão de termos em A será também limitada: um majorante do conjunto A é maior ou igual que todos os seus elementos e, portanto, será em particular maior ou igual que os termos duma tal sucessão. O análogo se passa para um minorante qualquer de A. Sabemos finalmente, por um dos teoremas fundamentais de sucessões, que quando estas são monótonas e limitadas, são obrigatoriamente convergentes. Juntando todos estes "ingredientes" concluímos assim que qualquer sucessão monótona de termos em A é limitada, porque A é limitado, e por isso será sempre convergente, de acordo com este teorema.

ii) **Verdadeira.** A condição apresentada,

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad a_{n+1}\, a_n < 0,$$

significa que os termos da sucessão terão sinais alternados. A questão é então saber se existirá um sucessão com termos positivo, negativo, positivo, negativo, positivo,... convergente. E com todos estes termos fora do conjunto A, isto é, em A^c. É fácil ver que uma sucessão nestas condições, se existir, terá que obrigatoriamente convergir para zero. Caso contrário, se convergisse para um número real positivo, ou para um número negativo, a partir de uma dada ordem os termos da sucessão teriam que ter o sinal fixo. E a condição de alternância de sinal deixaria de se verificar. O típico exemplo de sucessão com sinal alternado, que converge para zero é

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad n \geq 1.$$

Quase que funciona. Mas o termo $u_2 = 1/2$ ainda cai dentro do conjunto A. Seria desejável, então, começar a sucessão no termo u_3 porque daí para a frente teríamos as condições todas satisfeitas: a sucessão converge; tem sinais alternados; todos os termos u_n não pertencem a A. Mas a pergunta pede uma sucessão com $n \in \mathbb{N}$, ou seja, a começar em a_0. A seguinte ligeira modificação da sucessão anterior resolve o problema:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+3}.$$

Este é o exemplo que justifica a veracidade da proposição.

iii) **Falsa.** A justificação aqui pode ser feita de duas formas: recorrendo ao Teorema de Bolzano-Weierstrass, ou dando um contra-exemplo.
Com Bolzano-Weierstrass: Qualquer sucessão de termos em C é uma sucessão limitada, porque o conjunto C é limitado (supremo 1; ínfimo 0). Mesmo que a sucessão seja divergente, o teorema de Bolzano-Wierstrass garante que existirá pelo menos uma subsucessão dela que é convergente e isso contradiz a proposição.
Com contra-exemplo: É preciso notar que o conjunto C não é uma sucessão. É um conjunto de pontos. E uma sucessão com termos em C não é só o caso $u_n = 1/n^2$, com $n \geq 1$. A sucessão constante $a_n = 1$, para todo o $n \in \mathbb{N}$ é também uma sucessão de termos em C. Um fácil contra-exemplo da proposição, isto é, um exemplo duma sucessão divergente com óbvias subsucessões convergentes (tornando portanto a proposição falsa) será uma sucessão alternada de dois ponto de C. Por exemplo

$$x_0 = 1 \quad x_1 = \frac{1}{4} \quad x_2 = 1 \quad x_3 = \frac{1}{4} \quad x_4 = 1 \quad x_5 = \frac{1}{4} \quad \ldots$$

É uma sucessão divergente. Os termos da sucessão estão em C, porque são iguais apenas a dois dos pontos de C: 1 e $1/2^2$. Tem subsucessões convergentes: a dos termos pares é constante e converge para 1, e dos termos ímpares também é constante e converge para $1/4$.

II. 1. Todas as séries nestas alíneas têm termos não negativos de maneira que só nos referiremos a serem convergentes ou divergentes. Se forem convergentes são obviamente absolutamente convergentes.

a) Para n "grande" o termo mais importante do denominador da fracção é n^2 de maneira que parece razoável supor que a série tem um comportamento análogo ao da série $\sum \frac{1}{n^2}$ que sabemos ser convergente. Para justificar formalmente a afirmação anterior consideramos

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1/n^2}{1/(n^2-\sqrt{n})} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-\sqrt{n}}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} 1 - n^{-3/2} = 1$$

que garante que as duas séries são da mesma natureza pois obtivemos um limite finito e positivo.

b) De forma análoga à alínea anterior esta série é comparável a $\sum \frac{1}{n^2}$ e poderíamos seguir o mesmo raciocínio para provar que é convergente. Não seguiremos esssa via pois podemos exprimir esta série como uma série telescópica ou de Mengoli facilmente somável e obter a soma de série pedida ao mesmo tempo que justificamos a convergência. Com efeito

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right)$$

e denotando $a_n = \frac{1}{n}$ sabemos que a sucessão das somas parciais $(s_n)_{n\in\mathbb{N}_1}$ da série entre parêntesis na expressão anterior toma a forma

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 - a_{n+1} - a_{n+2} - a_{n+3}$$

para $n \geq 3$, pelo que $\lim s_n = a_1 + a_2 + a_3$ e consequentemente a série converge com soma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3) = \frac{11}{18}.$$

c) Uma subsucessão do termo geral da série (correspondendo a tomar termos cujo índice é um quadrado perfeito) é

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^n.$$

Como

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e > 2$$

podemos estimar para $n \geq 2$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} > 2^n \to +\infty$$

pelo que o termo geral da série não converge para 0 implicando que a série será divergente.

d) A subsucessão dos termos pares e ímpares da série são respectivamente $(\frac{1}{6^{2n}})_{n\in\mathbb{N}}$ e $(\frac{1}{4^{2n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$ o que permite majorar o termo geral da série pelo termo geral de uma série geométrica convergente de razão $1/4$ pelo que esta série é convergente.
A convergência absoluta da série permite calcular a soma[2] via o desdobramento na soma da soma dos termos pares com a soma dos termos pois cada uma destas é a soma de uma série geométrica. Com efeito:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(5+(-1)^n)^n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6^{2n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2n+1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{36}} + \frac{1}{4}\frac{1}{1 - \frac{1}{16}}.$$

2. Sejam $b_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$ e $y = x-2$. A série de potências $\sum b_n y^n$ tem raio de convergência

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|b_n|}}.$$

[2] Bastaria calcular a soma na alínea (b) ou nesta alínea.

No caso presente isto pode ser calculado via

$$\limsup \sqrt[n]{|b_n|} = \lim \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = \lim \frac{n+2}{n+3} = 1.$$

Daí que o raio de convergência é 1. Em termos da série original isto significa que a série converge absolutamente para $|x-2| < 1$, diverge para $|x-2| > 1$ e teremos que invetigar o que se passa para $x - 2 = 1$ e $x - 2 = -1$. No primeiro destes casos obtemos a série $\sum 1/(n+2)$ que sabemos ser divergente (justificamos por exemplo sabendo que a sua sucessão de somas parciais difere por uma constante da de $\sum 1/n$ e esta última sabemos que é divergente). No segundo caso obtemos a série $\sum (-1)^n/(n+2)$. Como $\lim 1/(n+2) = 0$ e a sucessão de termo geral $1/n+2$ é decrescente o critério de Leibniz garante a convergência da série.

Assim a série original converge absolutamente para $x \in \,]1,3[$, diverge para $x \in \,]-\infty,-1[\, \cup [3,+\infty[$ e converge simplesmente para $x = 1$.

III. Temos

$$v_n = |u_n + v_n - u_n| \geq u_n - |u_n - v_n| \geq u_n - \frac{1}{n^2}.$$

Assim a sucessão de somas parciais de $\sum v_n$ pode ser minorada pela diferença entre a sucessão de somas parciais de $\sum u_n$ (que diverge) e a soma da série $\sum \frac{1}{n^2}$. Como esta última converge a sucessão de somas parciais de $\sum v_n$ é minorada por uma sucessão cujo limite é $+\infty$ logo também tem limite $+\infty$. Logo $\sum v_n$ é divergente.