*Instituto Superior Técnico*
*Departamento de Matemática*

# Cálculo Diferencial e Integral II

Teste de Recuperação 2 (versão 2) - 3 de julho de 2019 - 10h
Duração: 1h30m
Todos os cursos excepto LMAC, MEFT

**Apresente e justifique todos os cálculos**

1. Seja $M$ o conjunto de $\mathbb{R}^3$ definido por $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + yz + z^2 = 1\}$.

[1.5] a) Mostre que $M$ é uma variedade e indique a sua dimensão.

[0.5] b) Justifique que $M$ é um conjunto compacto.

[2.0] c) Seja $f : M \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x, y, z) = z$. Determine os extremos globais de $f$.

2. Considere o sistema de equações $\begin{cases} x^4 + xyz + z^4 &= 1 \\ x^2 + xy + xz + y^2 + z^2 &= 1 \end{cases}$.

[1.5] a) Mostre que o sistema define $x$ e $y$ como funções de $z$ numa vizinhança do ponto $(1, 0, 0)$.

[1.5] b) Determine $x'(0)$ e $y'(0)$.

[1.0] c) Mostre que a função $x = x(z)$ tem um extremo em $z = 0$ e classifique-o.

3. Considere o campo vectorial $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $H(x, y, z) = (0, y, -z)$ e a superfície $S$ definida por

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 5;\ x \leq 2;\ z \geq -2\right\}.$$

[2.0] a) Mostre que $H$ tem divergência nula e determine um potencial vectorial associado, com a segunda componente nula.

[3.0] b) Determine o fluxo de $H$ através de $S$, no sentido da normal que em cada ponto de $S$ aponta no sentido oposto ao da origem.

4. Considere a superfície $\mathcal{S}_\alpha$ e a curva $\Gamma_\alpha$ definidas por

$$\mathcal{S}_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1;\ z = \alpha(x^2 - y^2)\}$$

e $\Gamma_\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1;\ z = \alpha(x^2 - y^2)\}$, onde $\alpha$ é um parâmetro real.

[2.0] a) Determine a área de $\mathcal{S}_\alpha$ em função de $\alpha$.

[1.0] b) Designando por $L(\alpha)$ o comprimento de $\Gamma_\alpha$, escreva um integral cujo valor seja igual a $L(\alpha)$.

[1.0] c) Justifique que $L(\alpha) = 2\pi + 2\pi\alpha^2 + R_2(\alpha)$, para $\alpha$ suficientemente pequeno, onde $R_2$ é o resto de segunda ordem da fórmula de Taylor de $L$ em torno de zero.

5. Seja $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ o campo vectorial definido por $f(x) = \|x\|^q x$, $q \in \mathbb{R}$ e onde $\|x\|$ denota a norma euclidiana de $x$.

[0.5] a) Calcule o fluxo de $f$ através da superfície da esfera de raio $\epsilon$ centrada na origem, em relação à normal exterior.

[0.5] b) Determine $\operatorname{div}(f)$.

[2.0] c) Seja $\Omega \in \mathbb{R}^3$ um conjunto aberto limitado que contém a origem e ao qual é possível aplicar o teorema da divergência. Utilize os resultados anteriores para mostrar que existe um único valor de $q$ para o qual o fluxo de $f$, através de $\partial\Omega$ no sentido da normal exterior, é independente de $\Omega$. Calcule o valor desse fluxo.