Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II

Teste 2 - 07 de Junho de 2019 - 9h - v2

Duração: 1h30m

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + xy + z^2 = 2;\ x + y = 1\}$.

[2.0] a) Mostre que Γ é uma variedade e determine a respectiva dimensão.

[1.0] b) Determine uma base do espaço tangente a Γ no ponto $(1, 0, 1)$.

[2.0] 2. Considere os rectângulos inscritos numa circunferência de raio $R > 0$. Usando o método dos multiplicadores de Lagrange, determine a área daquele que tem o maior perímetro possível.

[3.0] 3. Mostre que a equação

$$e^{xy} + xzy^2 = 1$$

define x como função, de classe C^1, de y e z em torno do ponto $(0, 1, 0)$.

Calcule $\dfrac{\partial x}{\partial y}(1, 0)$, $\dfrac{\partial x}{\partial z}(1, 0)$ e $\dfrac{\partial^2 x}{\partial y \partial z}(1, 0)$.

[3.0] 4. Considere o campo vectorial

$$G(x, y, z) = \Big(\frac{y-1}{x^2 + (y-1)^2} + \frac{x}{x^2 + (y-1)^2}, \frac{-x}{x^2 + (y-1)^2} + \frac{y-1}{x^2 + (y-1)^2}, z^2\Big).$$

Calcule o trabalho realizado por G ao longo da linha dada pelas equações $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$, $z = 0$ e percorrida uma vez no sentido anti-horário quando vista do ponto $(0, 0, 100)$.

5. Considere a superfície

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ \ 1 < z = 2 - x^2 - y^2\}$$

orientada em relação à normal unitária N cuja terceira componente é positiva.

[3.0] a) Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o campo vectorial definido por $F(x, y, z) = (1 - 4yz^2, y^2 z, y^3 + z^3)$. Calcule, usando o teorema da divergência, o fluxo do campo $\operatorname{rot} F$ através de P no sentido da normal N.

[3.0] b) Seja $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o campo vectorial definido por $H(x, y, z) = (-x, -y, z + x^3)$. Usando o teorema de Stokes, calcule o fluxo do campo $\operatorname{rot} H$ através de P no sentido da normal N.

[3.0] 6. Sejam φ, $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funções de classe C^2 e B a bola centrada na origem e de raio um. Supondo que $\varphi = 0$ e $\psi = 0$ em ∂B, mostre que

$$\iiint_B \varphi \operatorname{div}(\nabla \psi) = \iiint_B \psi \operatorname{div}(\nabla \varphi).$$