

Uniformização de Curvas Cúbicas

Rodrigo Pereira

Orientado pelo Professor Peter Gothen

6 março 2021

Programa Novos Talentos em Matemática 2020/21



Curvas Algébricas

Seja $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ um polinómio de duas variáveis com coeficientes reais, não constante e sem fatores repetidos. A *curva algébrica real* definida por P é o conjunto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : P(x, y) = 0\}$$

Curvas Algébricas

Seja $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ um polinómio de duas variáveis com coeficientes reais, não constante e sem fatores repetidos. A *curva algébrica real* definida por P é o conjunto

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : P(x, y) = 0\}$$

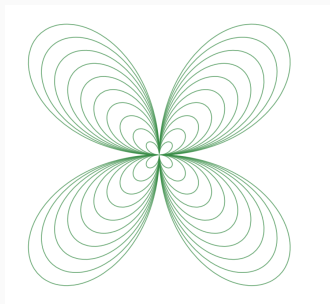


Figura 1: Curvas definidas por $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2 x^2 y^2$

$(x_0, y_0) \in C$ diz-se um *ponto singular* se

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

$(x_0, y_0) \in C$ diz-se um *ponto singular* se

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

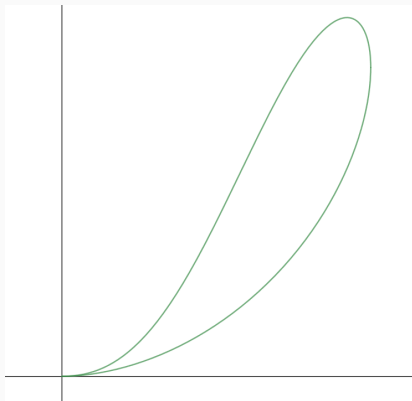


Figura 2: $x^4 + x^2y^2 - 2x^2y - xy^2 + y^2 = 0$

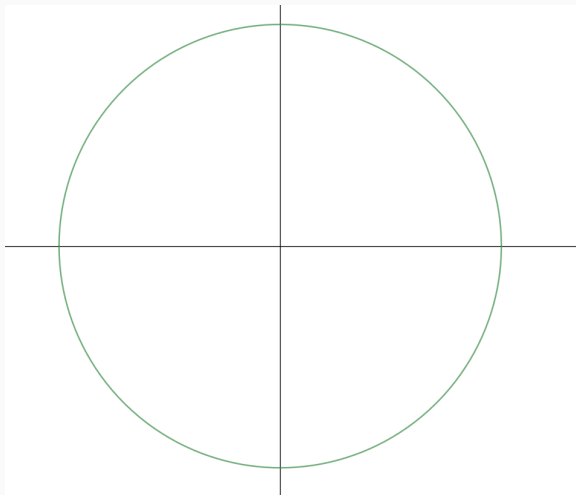


Figura 3: Circunferência

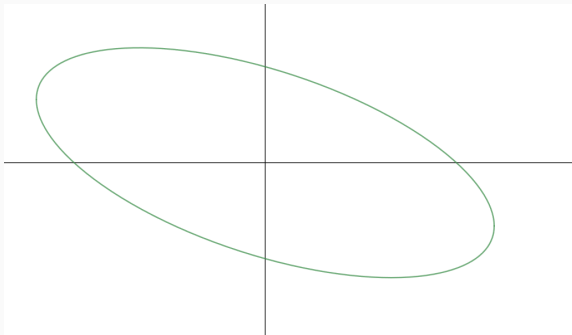


Figura 4: Elipse

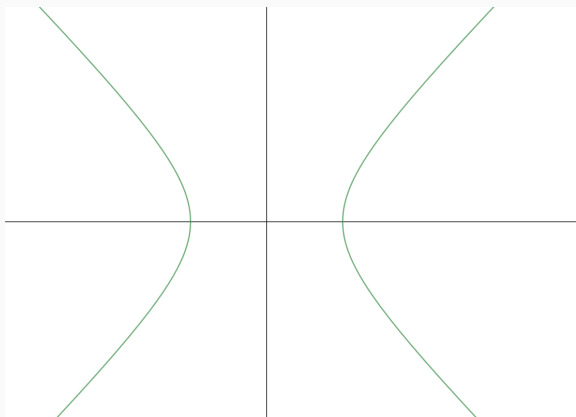


Figura 5: Hipérbole

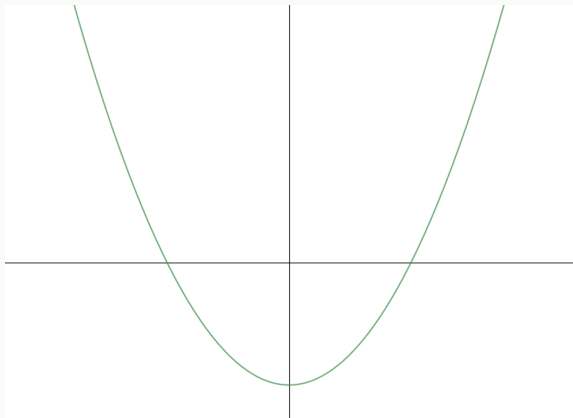


Figura 6: Parábola

Em 1704, Newton identifica 72 tipos diferentes.

Em 1704, Newton identifica 72 tipos diferentes.

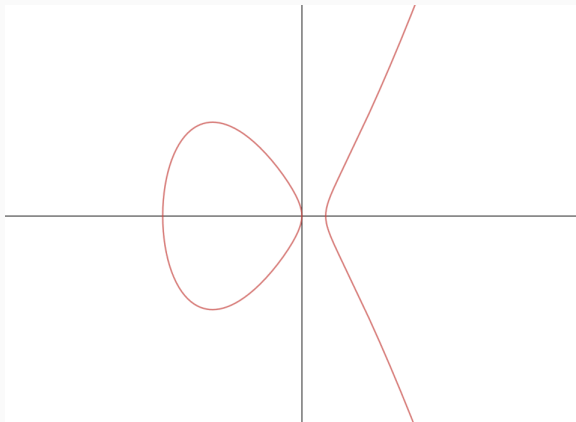


Figura 7: "Parábola divergente" $y^2 = x(x^2 + 2x - 1)$

Ferramentas: Plano projetivo

Considerando o conjunto de todas as retas de \mathbb{R}^3 que passam pela origem, obtemos o plano projetivo real \mathbb{P}_2 , e representamos a reta que passa por $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ por $[x : y : z]$ (*coordenadas homogêneas*).

Ferramentas: Plano projetivo

Considerando o conjunto de todas as retas de \mathbb{R}^3 que passam pela origem, obtemos o plano projetivo real \mathbb{P}_2 , e representamos a reta que passa por $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ por $[x : y : z]$ (*coordenadas homogêneas*).

Se $z \neq 0$,

$$[x : y : z] = \left[\frac{x}{z} : \frac{y}{z} : 1 \right] \leftrightarrow \left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z} \right)$$

estabelece uma bijeção entre \mathbb{R}^2 e um subconjunto de \mathbb{P}_2 . Os restantes pontos, com $z = 0$, são pensados como "no infinito".

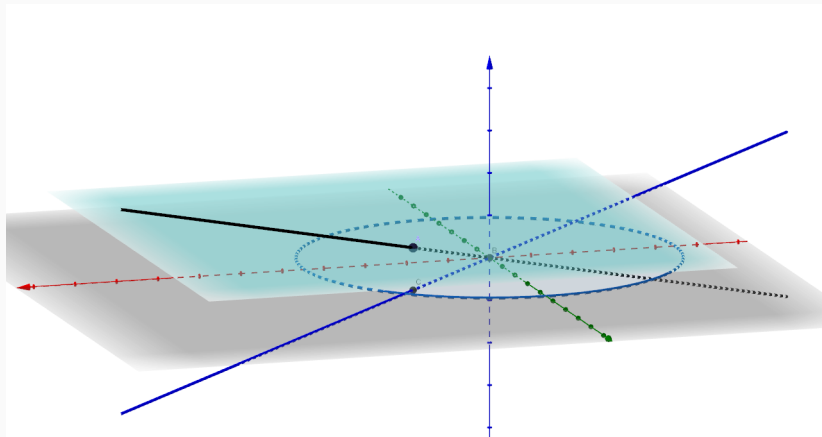


Figura 8: Plano projetivo real \mathbb{P}_2

Seja \tilde{P} um polinómio de 3 variáveis homogéneo (i.e. soma de monómios do mesmo grau), não constante e sem fatores repetidos. Uma *curva algébrica projetiva* é então o conjunto:

$$\{[x : y : z] \in \mathbb{P}_2 : \tilde{P}(x, y, z) = 0\}$$

Seja \tilde{P} um polinómio de 3 variáveis homogéneo (i.e. soma de monómios do mesmo grau), não constante e sem fatores repetidos. Uma *curva algébrica projetiva* é então o conjunto:

$$\{[x : y : z] \in \mathbb{P}_2 : \tilde{P}(x, y, z) = 0\}$$

Recuperamos a parte finita da curva considerando $P = \tilde{P}(x, y, 1)$. Por exemplo:

$$x^2 - y - 1 \longleftrightarrow x^2 - yz - z^2$$

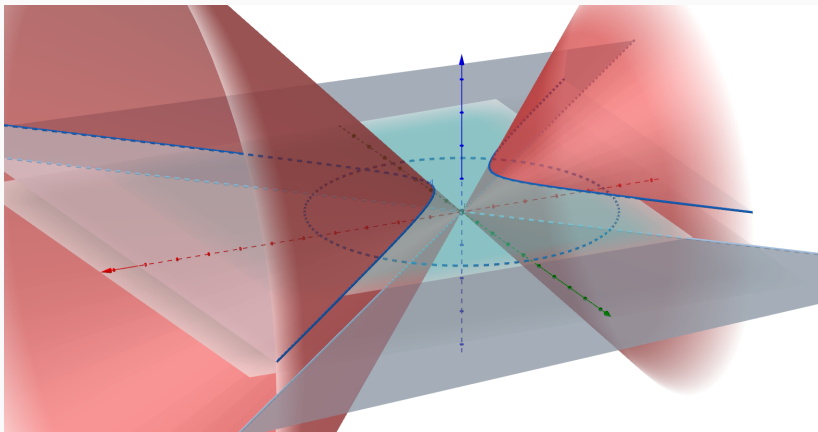


Figura 9: Hipérbole no plano projetivo

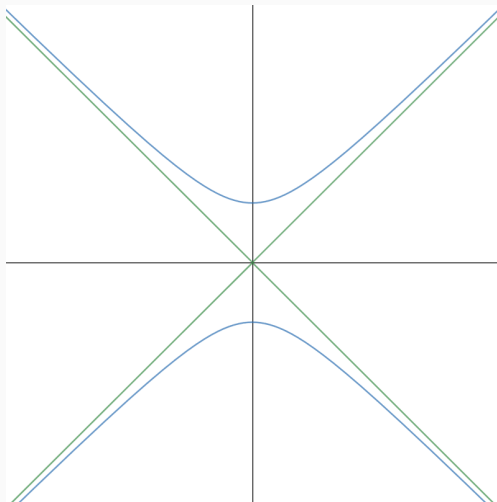


Figura 10: Hipérbole no plano afim e pontos no infinito

Podemos estender, de forma natural, todas as definições vistas até agora (polinômios, curvas algébricas, espaço projetivo) ao corpo dos números complexos \mathbb{C} .

Ferramentas: Números complexos

Podemos estender, de forma natural, todas as definições vistas até agora (polinômios, curvas algébricas, espaço projetivo) ao corpo dos números complexos \mathbb{C} .

Embora se perca a intuição visual do caso real, um simples exemplo como o da equação

$$y = ax^2 + bx + c$$

que tem *sempre* duas raízes, podendo estas ser complexas ou "no infinito", exemplifica o poder unificador dos números complexos, juntamente com o plano projetivo.

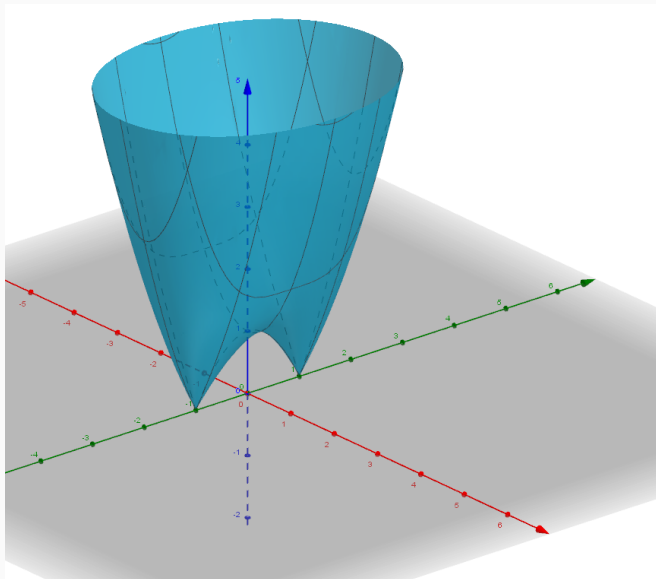


Figura 11: $|z^2 + 1|$

Função elítica de Weierstrass

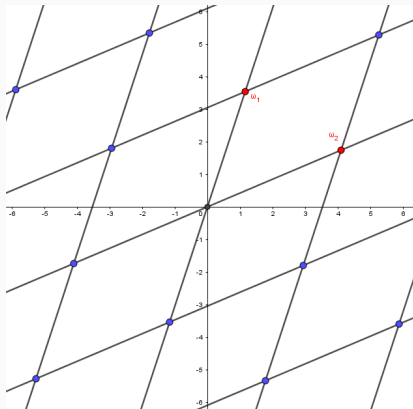
Sejam $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ linearmente independentes sobre \mathbb{R} . Define-se o seguinte reticulado de \mathbb{C} :

$$\Lambda = \{m\omega_1 + n\omega_2 : m, n \in \mathbb{Z}\}$$

Função elítica de Weierstrass

Sejam $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ linearmente independentes sobre \mathbb{R} . Define-se o seguinte reticulado de \mathbb{C} :

$$\Lambda = \{m\omega_1 + n\omega_2 : m, n \in \mathbb{Z}\}$$



Define-se a seguinte função em $\mathbb{C} \setminus \Lambda$:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

Define-se a seguinte função em $\mathbb{C} \setminus \Lambda$:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

Propriedades:

- \wp é meromorfa com um pólo duplo em cada $\omega \in \Lambda$;

Define-se a seguinte função em $\mathbb{C} \setminus \Lambda$:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

Propriedades:

- \wp é meromorfa com um pólo duplo em cada $\omega \in \Lambda$;
- $\wp(-z) = \wp(z) = \wp(z + \zeta)$ para todo o $z \in \mathbb{C}$ e $\zeta \in \Lambda$
- é par e duplamente periódica;

Define-se a seguinte função em $\mathbb{C} \setminus \Lambda$:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

Propriedades:

- \wp é meromorfa com um pólo duplo em cada $\omega \in \Lambda$;
- $\wp(-z) = \wp(z) = \wp(z + \zeta)$ para todo o $z \in \mathbb{C}$ e $\zeta \in \Lambda$
- é par e duplamente periódica;
- \wp é sobrejetiva e $\wp(z) = \wp(w)$ se e só se $w \in \Lambda \pm z$.

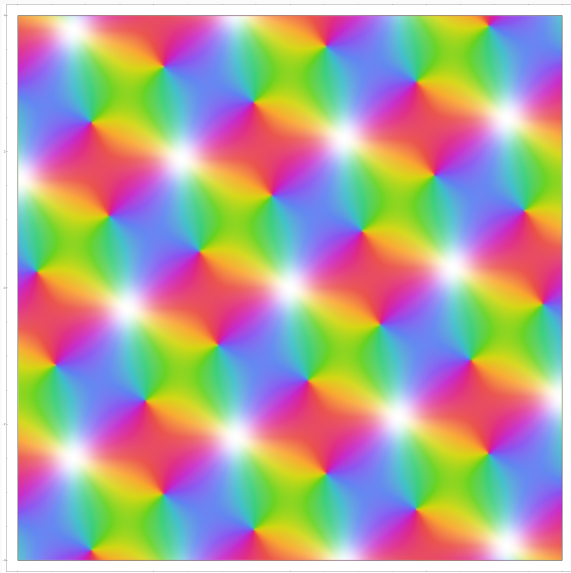
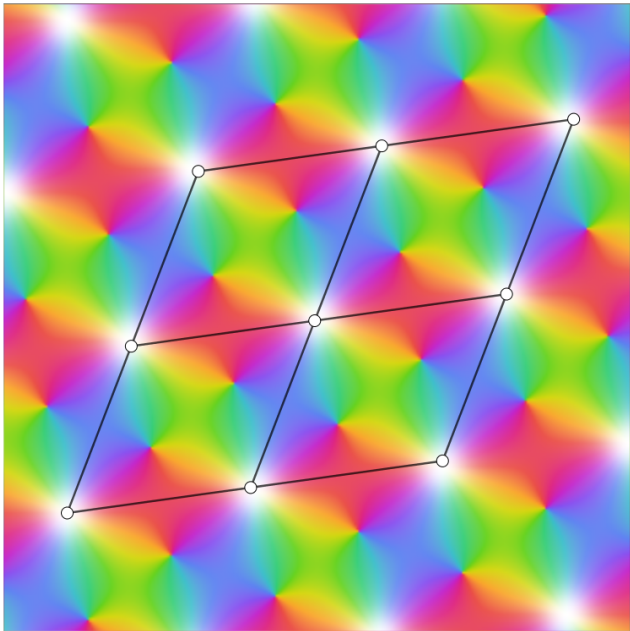


Figura 12: «Retrato de fase» da função φ

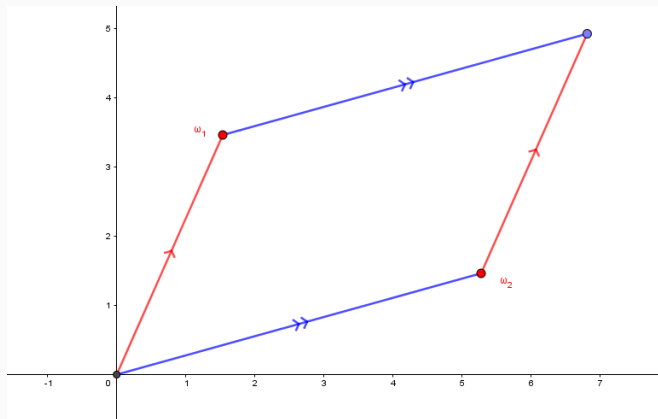


Toro Complexo

Considerando o reticulado Λ como subgrupo aditivo de \mathbb{C} podemos formar o quociente \mathbb{C}/Λ . Topologicamente, o espaço obtido é um toro e portanto designamo-lo por *toro complexo*.

Toro Complexo

Considerando o reticulado Λ como subgrupo aditivo de \mathbb{C} podemos formar o quociente \mathbb{C}/Λ . Topologicamente, o espaço obtido é um toro e portanto designamo-lo por *toro complexo*.



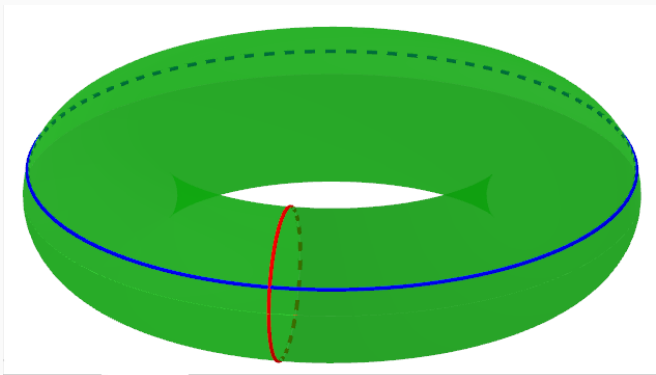


Figura 13: Toro

Dado um reticulado Λ de \mathbb{C} , definimos:

$$g_2(\Lambda) = 60 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^4}$$

$$g_3(\Lambda) = 140 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^6}$$

Dado um reticulado Λ de \mathbb{C} , definimos:

$$g_2(\Lambda) = 60 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^4}$$

$$g_3(\Lambda) = 140 \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^6}$$

Dizem-se os *invariantes de \wp* e \wp satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$\wp' = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

Seja C_Λ a curva projetiva em \mathbb{P}_2 definida pelo polinómio

$$Q_\Lambda(x, y, z) = y^2z - 4x^3 + g_2xz^2 + g_3z^3$$

Seja C_Λ a curva projetiva em \mathbb{P}_2 definida pelo polinómio

$$Q_\Lambda(x, y, z) = y^2z - 4x^3 + g_2xz^2 + g_3z^3$$

A aplicação $u: \mathbb{C}/\Lambda \longrightarrow C_\Lambda$ definida por:

$$u(\Lambda + z) = \begin{cases} [\wp(z) : \wp'(z) : 1] & \text{se } z \notin \Lambda \\ [0 : 1 : 0] & \text{se } z \in \Lambda \end{cases}$$

é um *homeomorfismo* entre o toro complexo e a curva projetiva.

Seja C_Λ a curva projetiva em \mathbb{P}_2 definida pelo polinómio

$$Q_\Lambda(x, y, z) = y^2z - 4x^3 + g_2xz^2 + g_3z^3$$

A aplicação $u: \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow C_\Lambda$ definida por:

$$u(\Lambda + z) = \begin{cases} [\wp(z) : \wp'(z) : 1] & \text{se } z \notin \Lambda \\ [0 : 1 : 0] & \text{se } z \in \Lambda \end{cases}$$

é um *homeomorfismo* entre o toro complexo e a curva projetiva.

Mas há uma relação mais forte entre os dois objetos:

Superfícies de Riemann

Um espaço topológico Hausdorff S diz-se uma *superfície* se é localmente homeomorfo a um aberto de \mathbb{C} ou seja:

Para todo o ponto $P \in S$, existe uma vizinhança aberta U de P , um aberto V de \mathbb{C} e um homeomorfismo $\phi: U \rightarrow V$, chamado de *carta*.

Superfícies de Riemann

Um espaço topológico Hausdorff S diz-se uma *superfície* se é localmente homeomorfo a um aberto de \mathbb{C} ou seja:

Para todo o ponto $P \in S$, existe uma vizinhança aberta U de P , um aberto V de \mathbb{C} e um homeomorfismo $\phi: U \rightarrow V$, chamado de *carta*.

Um *atlas* para S é um conjunto de homeomorfismos

$$\{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha : \alpha \in A\}$$

tal que

$$S = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

Superfícies de Riemann

Um espaço topológico Hausdorff S diz-se uma *superfície* se é localmente homeomorfo a um aberto de \mathbb{C} ou seja:

Para todo o ponto $P \in S$, existe uma vizinhança aberta U de P , um aberto V de \mathbb{C} e um homeomorfismo $\phi: U \rightarrow V$, chamado de *carta*.

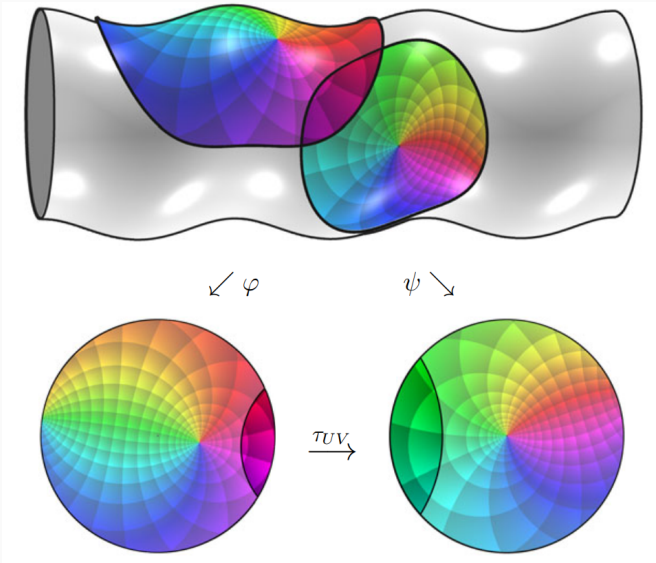
Um *atlas* para S é um conjunto de homeomorfismos

$$\{\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha : \alpha \in A\}$$

tal que

$$S = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

A superfície diz-se de *Riemann* se, para todo o $\alpha, \beta \in A$ a função de transição $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ é biholomorfa.



Todas as curvas projetivas complexas (não singulares) são superfícies de Riemann, assim como todos os toros complexos.

Todas as curvas projetivas complexas (não singulares) são superfícies de Riemann, assim como todos os toros complexos.

Assim, a aplicação u define não só um homeomorfismo entre o toro e a curva mas também um *isomorfismo de superfícies de Riemann*, pois é biholomorfa.

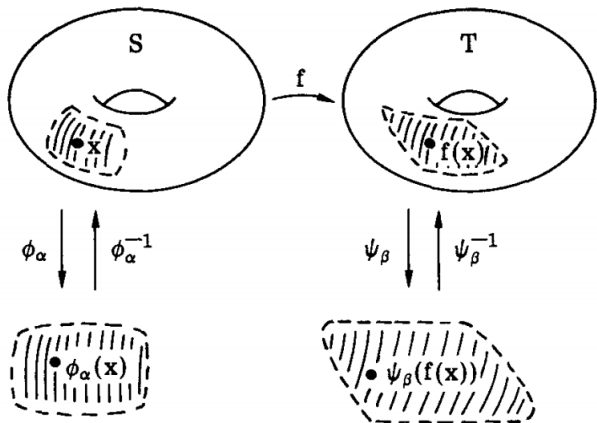
Todas as curvas projetivas complexas (não singulares) são superfícies de Riemann, assim como todos os toros complexos.

Assim, a aplicação u define não só um homeomorfismo entre o toro e a curva mas também um *isomorfismo de superfícies de Riemann*, pois é biholomorfa.

Uma função entre duas superfícies de Riemann S e T diz-se holomorfa se

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}$$

é holomorfa para todas as cartas ϕ de S e ψ de T .



Agora, dada uma curva cúbica não singular C , ela é isomorfa a um toro complexo \mathbb{C}/Λ .

Agora, dada uma curva cúbica não singular C , ela é isomorfa a um toro complexo \mathbb{C}/Λ .

Após uma *transformação projetiva* (i.e. uma transformação de \mathbb{P}_2 em \mathbb{P}_2 induzida por um isomorfismo linear de \mathbb{C}^3 em \mathbb{C}^3), podemos escrever a curva na forma:

$$y^2z = 4x^3 - g_2(\Lambda)xz^2 - g_3(\Lambda)z^3$$

Agora, dada uma curva cúbica não singular C , ela é isomorfa a um toro complexo \mathbb{C}/Λ .

Após uma *transformação projetiva* (i.e. uma transformação de \mathbb{P}_2 em \mathbb{P}_2 induzida por um isomorfismo linear de \mathbb{C}^3 em \mathbb{C}^3), podemos escrever a curva na forma:

$$y^2z = 4x^3 - g_2(\Lambda)xz^2 - g_3(\Lambda)z^3$$

Então, como recuperar o reticulado Λ ?

Dadas $f, g: S \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfas numa superfície de Riemann S , e um caminho c^1 por bocados $\gamma: [a, b] \rightarrow S$, define-se:

$$\int_{\gamma} f dg = \int_a^b (f \circ \gamma)(z)(g \circ \gamma)'(z) dz$$

Dadas $f, g: S \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfas numa superfície de Riemann S , e um caminho c^1 por bocados $\gamma: [a, b] \rightarrow S$, define-se:

$$\int_{\gamma} f dg = \int_a^b (f \circ \gamma)(z)(g \circ \gamma)'(z) dz$$

Então:

$$\Lambda = \left\{ \int_{\gamma} \frac{1}{y} dx : \gamma \text{ é um lacete } c^1 \text{ por bocados em } C \right\}$$

Vimos que uma curva algébrica projetiva de grau 3 não singular é uma superfície de Riemann de género 1 isomorfa a um quociente de \mathbb{C} por um seu subgrupo aditivo Λ , que pode ser visto como \mathbb{C} quocientado pela ação do grupo gerado pelas translações

$$\{z \mapsto z + \omega_1, z \mapsto z + \omega_2\}$$

Vimos que uma curva algébrica projetiva de grau 3 não singular é uma superfície de Riemann de género 1 isomorfa a um quociente de \mathbb{C} por um seu subgrupo aditivo Λ , que pode ser visto como \mathbb{C} quocientado pela ação do grupo gerado pelas translações

$$\{z \mapsto z + \omega_1, z \mapsto z + \omega_2\}$$

Objetivo

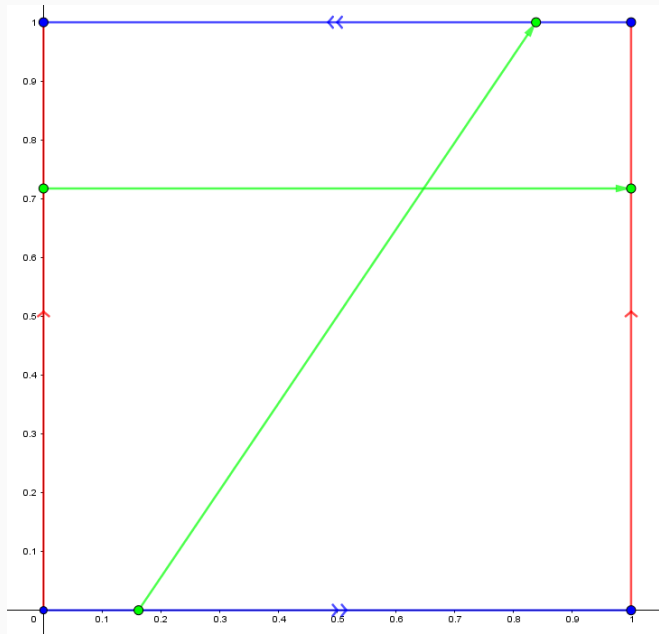
O que podemos agora fazer se permitirmos que a superfície a considerar possa ser não orientável?

Se, na definição de superfície de Riemann, permitirmos que as mudanças de carta possam ser não só holomorfas como também *anti-holomorfas* (i.e. a conjugação de uma função holomorfa), obtemos uma *superfície de Klein*.

Se, na definição de superfície de Riemann, permitirmos que as mudanças de carta possam ser não só holomorfas como também *anti-holomorfas* (i.e. a conjugação de uma função holomorfa), obtemos uma *superfície de Klein*.

A *garrafa de Klein* pode ser obtida, por exemplo, através do quociente de \mathbb{C} pela ação do seguinte subgrupo das suas isometrias:

$$\{z \mapsto z + 1, z \mapsto -\bar{z} + 1 + i\}$$



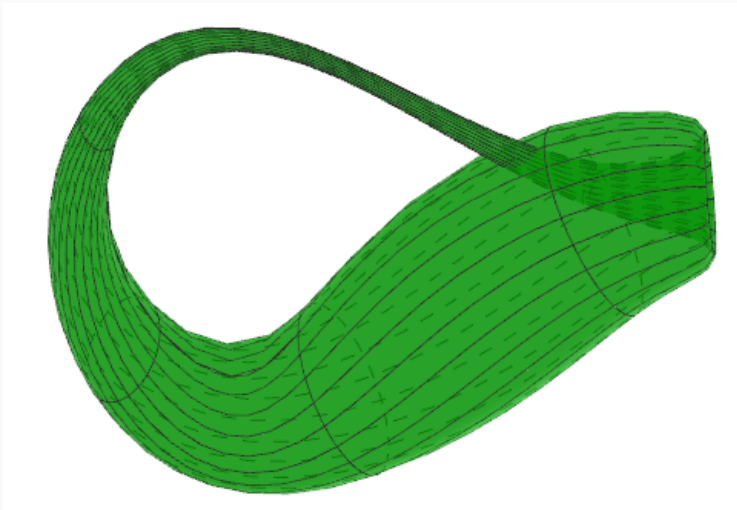





Figura 14: Garrafa de Klein

-  F. Kirwan. *Complex Algebraic Curves*. Cambridge University Press, 1992
-  H. P. Saint-Gervais *Uniformization of Riemann Surfaces. Revisiting a hundred-year-old problem*. European Mathematical Society, 2016
-  E. Wegert *Visual Complex Functions. An Introduction with Phase Portraits*. Springer Basel, 2012