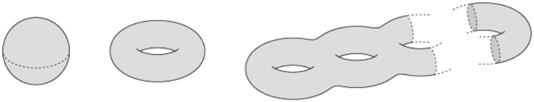
Superficies de Riemann

João G. Silva

FCUL

March 10, 2021



Índice

Cartas

Seja X um espaço topológico, uma carta (complexa) em X é uma homeomorfismo $\phi : U \to V$, onde U é um aberto de X e $V \subset \mathbb{C}$ é um aberto de $\mathbb{C}$.

Cartas

Seja X um espaço topológico, uma carta (complexa) em X é uma homeomorfismo $\phi : U \to V$, onde U é um aberto de X e $V \subset \mathbb{C}$ é um aberto de $\mathbb{C}$.

Cartas compatíveis

Sejam $\phi_1 : U_1 \to V_1$ e $\phi_2 : U_2 \to V_2$ duas cartas de X. Dizemos que ϕ_1 e ϕ_2 são compatíveis se $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ou se

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) \to \phi_2(U_1 \cap U_2)$$

é holomorfa. A função $T = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}$ chama-se função de transição entre as duas cartas.

Atlas

Um atlas (complexo) $\mathcal{A}$ em X é uma coleção $\mathcal{A} = \{\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha\}$ de cartas complexas compatíveis duas a duas cujos dominios cobrem X.

Dizemos que dois atlas em X, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, são compatíveis se toda a carta de $\mathcal{A}$ for compatível com toda a carta de $\mathcal{B}$.

Superfícies de Riemann

Atlas

Um atlas (complexo) $\mathcal{A}$ em X é uma coleção $\mathcal{A} = \{\phi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha\}$ de cartas complexas compatíveis duas a duas cujos dominios cobrem X.
Dizemos que dois atlas em X, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, são compatíveis se toda a carta de $\mathcal{A}$ for compatível com toda a carta de $\mathcal{B}$.

Estrutura Complexa e Superfície de Riemann

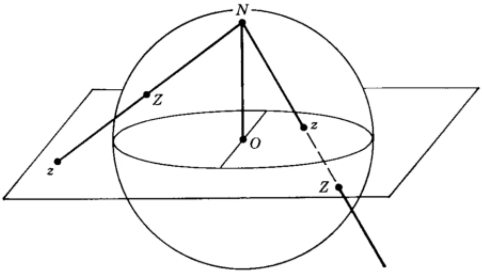
Uma estrutura complexa em X é um atlas maximal em X, i.e., uma classe de equivalência em X.
Uma superfície de Riemann é um espaço topológico de Hausdorff, com base numerável equipado com uma estrutura complexa.

Esfera de Riemann

Seja $S^2 = \{(x, y, w) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Consideramos as funções

$$\begin{aligned} \phi_1 : & S^2 - \{(0,0,1)\} \longrightarrow \mathbb{C} \\ & (x, y, w) \mapsto \frac{x}{1-w} + i\frac{y}{1-w} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \phi_2 : & S^2 - \{(0,0,-1)\} \longrightarrow \mathbb{C} \\ & (x, y, w) \mapsto \frac{x}{1+w} - i\frac{y}{1+w} \end{aligned}$$

ϕ_1 e ϕ_2 são cartas compatíveis. Considerando S^2 como subespaço topologico de $\mathbb{R}^3$, S^2 é uma superfície de Riemann, chamada esfera de Riemann e denotamo-la por $\mathbb{C}_\infty$



Como obter uma superfície de Riemann?

1. Começar com um conjunto X

Como obter uma superfície de Riemann?

1. Começar com um conjunto X
2. Encontrar uma coleção numerável de subconjuntos de X, $\{U_\alpha\}$, que cobrem X.

Como obter uma superfície de Riemann?

1. Começar com um conjunto X
2. Encontrar uma coleção numerável de subconjuntos de X, $\{U_\alpha\}$, que cobrem X.
3. Para cada α, encontrar uma bijeção (se possível) ϕ_α de U_α para $V_\alpha \subset \mathbb{C}$.

Como obter uma superfície de Riemann?

1. Começar com um conjunto X
2. Encontrar uma coleção numerável de subconjuntos de X, $\{U_\alpha\}$, que cobrem X.
3. Para cada α, encontrar uma bijeção (se possível) ϕ_α de U_α para $V_\alpha \subset \mathbb{C}$.
4. Definimos uma topologia em X, com base na seguinte regra: um subconjunto $U \subset X$ é aberto se e só se a interseção $U \cap U_\alpha$ é aberto, e $U \cap U_\alpha$ será aberto se e só se $\phi_\alpha(U \cap U_\alpha)$ é aberto em $\mathbb{C}$. Por definição os ϕ'_αs são cartas complexas em X.

Como obter uma superfície de Riemann?

1. Começar com um conjunto X
2. Encontrar uma coleção numerável de subconjuntos de X, $\{U_\alpha\}$, que cobrem X.
3. Para cada α, encontrar uma bijeção (se possível) ϕ_α de U_α para $V_\alpha \subset \mathbb{C}$.
4. Definimos uma topologia em X, com base na seguinte regra: um subconjunto $U \subset X$ é aberto se e só se a interseção $U \cap U_\alpha$ é aberto, e $U \cap U_\alpha$ será aberto se e só se $\phi_\alpha(U \cap U_\alpha)$ é aberto em $\mathbb{C}$. Por definição os ϕ_α's são cartas complexas em X.
5. Verificar que as cartas ϕ_α são compatíveis duas a duas.

Como obter uma superfície de Riemann?

1. Começar com um conjunto X
2. Encontrar uma coleção numerável de subconjuntos de X, $\{U_\alpha\}$, que cobrem X.
3. Para cada α, encontrar uma bijeção (se possível) ϕ_α de U_α para $V_\alpha \subset \mathbb{C}$.
4. Definimos uma topologia em X, com base na seguinte regra: um subconjunto $U \subset X$ é aberto se e só se a interseção $U \cap U_\alpha$ é aberto, e $U \cap U_\alpha$ será aberto se e só se $\phi_\alpha(U \cap U_\alpha)$ é aberto em $\mathbb{C}$. Por definição os ϕ'_αs são cartas complexas em X.
5. Verificar que as cartas ϕ_α são compatíveis duas a duas.
6. Verificar que X é um espaço conexo e Hausdorff.

Reta Projectiva

Seja $\mathbb{CP}^1$ o conjunto de subespaços unidimensionais de $\mathbb{C}^2$.

$$\mathbb{CP}^1 = \{[z : w] : z \neq 0 \text{ ou } w \neq 0\}$$

$$U_0 = \{[z : w] : z \neq 0\} \qquad U_1 = \{[z : w] : w \neq 0\}$$

$$\begin{aligned} \phi_0 : & U_0 \longrightarrow \mathbb{C} \\ & \phi_0[z : w] \mapsto \frac{w}{z} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \phi_1 : & U_0 \longrightarrow \mathbb{C} \\ & \phi_1[z : w] \mapsto \frac{z}{w} \end{aligned}$$

Com estas cartas e com os conjunto U_0 e U_1 conseguimos construir uma superfície de Riemann em $\mathbb{CP}^1$ a que chamamos reta projectiva complexa. Para além disto verifica-se facilmente que $\mathbb{CP}^1$ é ainda um espaço compacto.

Funções em Superfícies de Riemann

Sejam X,Y superfícies de Riemann.

Funções holomorfas

Seja $f : W \subset X \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função que asssume valores complexos e $p \in W$ dizemos que f é holomorfa em p se existe uma carta $\phi : U \longrightarrow V$ (com $p \in U$) tal que a composição $f \circ \phi^{-1}$ é holomorfa em $\phi(p)$.

Sejam X,Y superfícies de Riemann.

Funções holomorfas

Seja $f : W \subset X \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função que asssume valores complexos e $p \in W$ dizemos que f é holomorfa em p se existe uma carta $\phi : U \longrightarrow V$ (com $p \in U$) tal que a composição $f \circ \phi^{-1}$ é holomorfa em $\phi(p)$.

Não é difícil de ver que o conjunto de todas as funções holomorfas em $W \subset X$ (W aberto), $\mathcal{O}_X(W)$ é uma $\mathbb{C}$-álgebra.

Funções em Superfícies de Riemann

Sejam X,Y superfícies de Riemann.

Funções holomorfas

Seja $f : W \subset X \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função que asssume valores complexos e $p \in W$ dizemos que f é holomorfa em p se existe uma carta $\phi : U \longrightarrow V$ (com $p \in U$) tal que a composição $f \circ \phi^{-1}$ é holomorfa em $\phi(p)$.

Não é difícil de ver que o conjunto de todas as funções holomorfas em $W \subset X$ (W aberto), $\mathcal{O}_X(W)$ é uma $\mathbb{C}$-álgebra.

Singularidades

Dizemos que $f : W \subset X \longrightarrow \mathbb{C}$ tem uma singularidade removível em $p \in w$ (resp. polo, singularidade essencial) se existe uma carta ϕ tal que a composição $f \circ \phi^{-1}$ tem uma singularidade removível (resp. pólo, singularidade essencial) em $\phi(p)$

Funções Meromorfas

Dizemos que uma função em f em X é meromorfa num ponto $p \in X$ se ou é holomorfa, tem uma singularidade removível, ou um pólo em p.

Denotamos por $\mathcal{M}_X(W)$ o conjunto das funções meromorfas em $W \subset X$ um aberto de X.

Funções Meromorfas

Dizemos que uma função em f em X é meromorfa num ponto $p \in X$ se ou é holomorfa, tem uma singularidade removível, ou um pólo em p.

Denotamos por $\mathcal{M}_X(W)$ o conjunto das funções meromorfas em $W \subset X$ um aberto de X.

Proposição

$\mathcal{M}_X(W)$ é corpo das frações do domínio integral do corpo das funções holomorfas $\mathcal{O}_X(W)$.

Funções Meromorfas

Dizemos que uma função em f em X é meromorfa num ponto $p \in X$ se ou é holomorfa, tem uma singularidade removível, ou um pólo em p.

Denotamos por $\mathcal{M}_X(W)$ o conjunto das funções meromorfas em $W \subset X$ um aberto de X.

Proposição

$\mathcal{M}_X(W)$ é corpo das frações do domínio integral do corpo das funções holomorfas $\mathcal{O}_X(W)$.

Teorema

- Sejam f,g duas funções holomorfas em $p \in X$ então também o são $f \pm g$, fg, e se $g(p) \neq 0$ então f/g também é holomorfa em p.

Funções Meromorfas

Dizemos que uma função em f em X é meromorfa num ponto $p \in X$ se ou é holomorfa, tem uma singularidade removível, ou um pólo em p.

Denotamos por $\mathcal{M}_X(W)$ o conjunto das funções meromorfas em $W \subset X$ um aberto de X.

Proposição

$\mathcal{M}_X(W)$ é corpo das frações do domínio integral do corpo das funções holomorfas $\mathcal{O}_X(W)$.

Teorema

- Sejam f,g duas funções holomorfas em $p \in X$ então também o são $f \pm g$, fg, e se $g(p) \neq 0$ então f/g também é holomorfa em p.
- Sejam f,g duas funções meromorfas em $p \in X$ então também o são $f \pm g$, fg, e se g não é identicamente nula então f/g também é meromorfa em p.

Exemplo - Reta projectiva

Considere-se a reta projectiva $\mathbb{CP}^1$. Sejam $p(z,w)$ e $q(z,w)$ dois polinómios homogéneos com o mesmo grau. Então $f[z:w] = p(z,w)/q(z,w)$ é holomorfa em $[z_0 : w_o] \in \mathbb{CP}^1$ se $q(z_0, w_0) \neq 0$. E se q não for identicamente nula, então f será uma função meromorfa bem definida.

Exemplo - Reta projectiva

Considere-se a reta projectiva $\mathbb{CP}^1$. Sejam $p(z, w)$ e $q(z, w)$ dois polinómios homogéneos com o mesmo grau. Então $f[z : w] = p(z, w)/q(z, w)$ é holomorfa em $[z_0 : w_o] \in \mathbb{CP}^1$ se $q(z_0, w_0) \neq 0$. E se q não for identicamente nula, então f será uma função meromorfa bem definida.

Exemplo - Plano complexo

As definições de função meromorfa e holomorfa coincidem com as definições usuais de funções holomorfas e meromorfas quando se considera o plano complexo $\mathbb{C}$ como a superfície de Riemann.

Série de Laurent

Seja f uma função meromorfa numa vizinhança $p \in X$ com no máximo um pólo em p. Seja $\phi : U \longrightarrow V$ uma carta com $p \in U$. Pensando em z como a coordenada local em X perto de p ($\phi(p) = z_0$), tal que $z = \phi(x)$, x perto de p. Podemos então expandir $f \circ \phi^{-1}$ numa série de Laurent:

$$f(\phi^{-1}(z)) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \text{ com } c_{n_0} \neq 0$$

A este n_0 chamamos de ordem de f em p, e denota-se por $ord_p(f)$.

Série de Laurent e ordem de uma função meromorfa

Lema

Sejam f,g funções meroformas (não constantes) em $p \in X$. Então

- $ord_p(fg) = ord_p(f) + ord_p(g)$
- $ord_p(f/g) = ord_p(f) - ord_p(g)$
- $ord_p(1/g) = -ord_p(g)$
- $ord_p(f \pm g) = min\{ord_p(f), ord_p(g)\}$

Série de Laurent e ordem de uma função meromorfa

Lema

Sejam f,g funções meroformas (não constantes) em $p \in X$. Então

- $ord_p(fg) = ord_p(f) + ord_p(g)$
- $ord_p(f/g) = ord_p(f) - ord_p(g)$
- $ord_p(1/g) = -ord_p(g)$
- $ord_p(f \pm g) = min\{ord_p(f), ord_p(g)\}$

Proposição

Seja f uma função meromorfa não constante numa superfície de Riemann compacta. Então

Série de Laurent e ordem de uma função meromorfa

Lema

Sejam f,g funções meroformas (não constantes) em $p \in X$. Então

- $ord_p(fg) = ord_p(f) + ord_p(g)$
- $ord_p(f/g) = ord_p(f) - ord_p(g)$
- $ord_p(1/g) = -ord_p(g)$
- $ord_p(f \pm g) = min\{ord_p(f), ord_p(g)\}$

Proposição

Seja f uma função meromorfa não constante numa superfície de Riemann compacta. Então

$$\sum_{p \in X} ord_p(f) = 0$$

Aplicações holomorfas entre superfícies de Riemann e forma local

Definição - Aplicação holomorfa

Sejam X,Y superfícies de Riemann.
Uma aplicação $F : X \longrightarrow Y$ é holomorfa em $p \in X$ se e só se existem cartas $\phi_1 : U_1 \longrightarrow V_1$ em X com $p \in U_1$ e $\phi_2 : U_2 \longrightarrow V_2$ em Y com $F(p) \in U_2$ tais que $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ é holomorfa em $\phi_1(p)$.
Se F está definida num aberto $W \subset X$, então dizemos que F é holomorfa em W se for holomorfa em cada um dos seus pontos. Em particular, F diz-se uma aplicação holomorfa se for holomorfa em X.

Aplicações holomorfas entre superfícies de Riemann e forma local

Definição - Aplicação holomorfa

Sejam X,Y superfícies de Riemann.
Uma aplicação $F : X \longrightarrow Y$ é holomorfa em $p \in X$ se e só se existem cartas $\phi_1 : U_1 \longrightarrow V_1$ em X com $p \in U_1$ e $\phi_2 : U_2 \longrightarrow V_2$ em Y com $F(p) \in U_2$ tais que $\phi_2 \circ F \circ \phi_1^{-1}$ é holomorfa em $\phi_1(p)$.
Se F está definida num aberto $W \subset X$, então dizemos que F é holomorfa em W se for holomorfa em cada um dos seus pontos. Em particular, F diz-se uma aplicação holomorfa se for holomorfa em X.

Proposição - Forma local

Seja $F : X \longrightarrow Y$ uma aplicação holomorfa não constante definida em $p \in X$. Então existe um único inteiro $m \geq 1$ tal que: para toda a carta $\phi_2 : U_2 \longrightarrow V_2$ em Y centrada em $F(p)$, existe uma carta $\phi_1 : U_1 \longrightarrow V_1$ centrada em p tal que:

$$\phi_2(F(\phi_1^{-1}(z))) = z^m$$

A este número chamamos de múltiplicidade de F em p, $mult_p(F)$

Definição

Seja $F : X \longrightarrow Y$ uma aplicação holomorfa não constante. Um ponto $p \in X$ é um ponto de ramificação de F se $mult_p(F) \geq 2$. Um ponto $y \in Y$ é um valor de ramificação de F se é a imagem de um ponto de ramificação de F.

Multiplicidade e grau

Definição

Seja $F : X \longrightarrow Y$ uma aplicação holomorfa não constante. Um ponto $p \in X$ é um ponto de ramificação de F se $mult_p(F) \geq 2$. Um ponto $y \in Y$ é um valor de ramificação de F se é a imagem de um ponto de ramificação de F.

Proposição

Seja $F : X \longrightarrow Y$ uma aplicação holomorfa não constante entre superfícies de Riemann compactas. Para cada $y \in Y$, define-se

$$d_y(F) = \sum_{p \in F^{-1}(y)} mult_p(F)$$

Então $d_y(F)$ é constante, independente de $y \in Y$.
Nós chamamos a esta constante o grau de F, denotado por $deg(F)$.

Fórmula de Riemann - Hurwitz

Seja $F : X \longrightarrow Y$ uma aplicação holomorfa não constante entre superfícies de Riemann compactas. Então

$$2g(X) - 2 = deg(F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} [mult_p(F) - 1]$$

Seja $p(y) = (y - y_1)(y - y_2)...(y - y_{2n})$, com $y_i \neq y_j$, $i \neq j$.
Considerem-se as seguintes superfícies de Riemann

$$\widetilde{X} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^2 = p(y)\} \quad Y = \mathbb{C}_\infty$$

Prova-se que a aplicação $F : X \longrightarrow Y, F(x, y) = y$ é holomorfa onde X é uma campactificação natural de $\widetilde{X}$. Temos que F tem grau 2 ($deg(F) = 2$), e pela fórmula de Riemann - Hurwitz

$$2g(X) - 2 = 2(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} [mult_p(F) - 1]$$

Como $2g(Y) = 0$ e $mult_{x,y}(F) = 2$ para $y \in \{y_1, ..., y_{2n}\}$ e $mult_{x,y}(F) = 1$ caso contrário, sai: $g(X) = n - 1$

Bilbiografia

- Miranda Rick. Algebraic Curves and Riemann Surfaces, American Mathematical Society
- Notas de Análise Complexa, Prof. Carlos Florentino.