Conjuntos de Sidon

David Nassauer, IST

6 de Março de 2021

Definição de Sidon

Os conjuntos de Sidon são aqueles que evitam ter estrutura aditiva.

Definição de Sidon

Os conjuntos de Sidon são aqueles que evitam ter estrutura aditiva.

Definição

Um conjunto de naturais $A \subseteq \mathbb{N}$ diz-se conjunto de Sidon se dados quatro elementos de A $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$,
$(a_1 + a_2 = a_3 + a_4) \Rightarrow \{a_1, a_2\} = \{a_3, a_4\}$.

Isto é, cada escolha de dois elementos de A produz uma soma diferente.

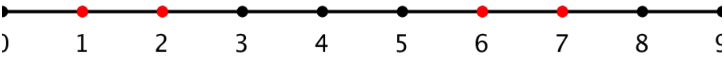
Definição de Sidon

Os conjuntos de Sidon são aqueles que evitam ter estrutura aditiva.

Definição

Um conjunto de naturais $A \subseteq \mathbb{N}$ *diz-se conjunto de Sidon se dados quatro elementos de* A $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$,
$(a_1 + a_2 = a_3 + a_4) \Rightarrow \{a_1, a_2\} = \{a_3, a_4\}$.

Isto é, cada escolha de dois elementos de A produz uma soma diferente.



Exemplos

Um exemplo de um conjunto de Sidon infinito é: $\{2^n : n \in \mathbb{N}_0\}$.

Exemplos

Um exemplo de um conjunto de Sidon infinito é: $\{2^n : n \in \mathbb{N}_0\}$.

No entanto, este conjunto tem apenas $\lfloor log_2(n) \rfloor + 1$ elementos em $[1, n]$. Qual será o maior número de elementos de um subconjunto de Sidon de $[1, n]$ que conseguimos obter?

Exemplos

Um exemplo de um conjunto de Sidon infinito é: $\{2^n : n \in \mathbb{N}_0\}$.

No entanto, este conjunto tem apenas $\lfloor log_2(n) \rfloor + 1$ elementos em $[1, n]$. Qual será o maior número de elementos de um subconjunto de Sidon de $[1, n]$ que conseguimos obter?

Podemos provar o seguinte:

Exemplos

Um exemplo de um conjunto de Sidon infinito é: $\{2^n : n \in \mathbb{N}_0\}$.

No entanto, este conjunto tem apenas $\lfloor log_2(n) \rfloor + 1$ elementos em $[1, n]$. Qual será o maior número de elementos de um subconjunto de Sidon de $[1, n]$ que conseguimos obter?

Podemos provar o seguinte:

Proposição

Qualquer subconjunto de Sidon de $[1, n]$ tem no máximo $2\sqrt{n}$ elementos.

Sidon Denso

Demonstração.

Basta notar que dados dois elementos $a, b \in A$, temos $2 \leq a + b \leq 2n$. Ou seja, podem existir no máximo $2n - 1$ somas distintas. Existem $\frac{k(k+1)}{2}$ somas num conjunto de tamanho $k = |A|$, e por isso

Sidon Denso

Demonstração.

Basta notar que dados dois elementos $a, b \in A$, temos $2 \leq a + b \leq 2n$. Ou seja, podem existir no máximo $2n - 1$ somas distintas. Existem $\frac{k(k+1)}{2}$ somas num conjunto de tamanho $k = |A|$, e por isso

$$\begin{aligned} & \frac{k(k+1)}{2} \leq 2n \\ \Rightarrow \quad & k^2 + k \leq 4n \\ \Rightarrow \quad & k \leq 2\sqrt{n}. \end{aligned}$$

□

Construção de Erdos

Será que existem subconjuntos de Sidon de $[1, n]$ de tamanho $c\sqrt{n}$?

Construção de Erdos

Será que existem subconjuntos de Sidon de $[1, n]$ de tamanho $c\sqrt{n}$? Sim!

Construção de Erdos

Será que existem subconjuntos de Sidon de $[1, n]$ de tamanho $c\sqrt{n}$? Sim!

Definição

Seja $(G, +)$ um grupo comutativo. Um conjunto de elementos $A \subseteq G$ diz-se conjunto de Sidon se dados quatro elementos de A $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$, $(a_1 + a_2 = a_3 + a_4) \Rightarrow \{a_1, a_2\} = \{a_3, a_4\}$.

Construção de Erdos

Será que existem subconjuntos de Sidon de $[1, n]$ de tamanho $c\sqrt{n}$? Sim!

Definição

Seja $(G, +)$ um grupo comutativo. Um conjunto de elementos $A \subseteq G$ diz-se conjunto de Sidon se dados quatro elementos de A $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$, $(a_1 + a_2 = a_3 + a_4) \Rightarrow \{a_1, a_2\} = \{a_3, a_4\}$.

Construção de Erdos:

- Notamos que $S = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{Z}_p\}$ é um subconjunto de Sidon de $\mathbb{Z}_p^2$ (p primo).

Construção de Erdos

Será que existem subconjuntos de Sidon de $[1, n]$ de tamanho $c\sqrt{n}$? Sim!

Definição

Seja $(G, +)$ um grupo comutativo. Um conjunto de elementos $A \subseteq G$ diz-se conjunto de Sidon se dados quatro elementos de A $a_1, a_2, a_3, a_4 \in A$, $(a_1 + a_2 = a_3 + a_4) \Rightarrow \{a_1, a_2\} = \{a_3, a_4\}$.

Construção de Erdos:

- Notamos que $S = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{Z}_p\}$ é um subconjunto de Sidon de $\mathbb{Z}_p^2$ (p primo).
- Se $(x + y, x^2 + y^2) = (z + w, z^2 + w^2)$, então $x^2 - z^2 = w^2 - y^2$. Se $x - z \neq 0$, então $x + z = w + y$, mas como $x + y = z + w$, temos $x = w$ e $z = w$.

Construção de Erdos

Construímos um subconjunto de Sidon de tamanho p de um conjunto com p^2 elementos.

Construção de Erdos

Construímos um subconjunto de Sidon de tamanho p de um conjunto com p^2 elementos.

Agora projetamos os pares $(x, y) \in \mathbb{Z}_p^2$ deste conjunto para o intervalo $[1, 2p^2]$.

Construção de Erdos

Construímos um subconjunto de Sidon de tamanho p de um conjunto com p^2 elementos.

Agora projetamos os pares $(x, y) \in \mathbb{Z}_p^2$ deste conjunto para o intervalo $[1, 2p^2]$.

- Usamos a aplicação $\varphi : \mathbb{Z}_p^2 \to \mathbb{N}$ tal que $\varphi(x, y) = 1 + x + 2py$.

Construção de Erdos

Construímos um subconjunto de Sidon de tamanho p de um conjunto com p^2 elementos.

Agora projetamos os pares $(x, y) \in \mathbb{Z}_p^2$ deste conjunto para o intervalo $[1, 2p^2]$.

- Usamos a aplicação $\varphi : \mathbb{Z}_p^2 \to \mathbb{N}$ tal que $\varphi(x, y) = 1 + x + 2py$.
- É possível mostrar que esta aplicação preserva a propriedade de Sidon!

Construção de Erdos

Construímos um subconjunto de Sidon de tamanho p de um conjunto com p^2 elementos.

Agora projetamos os pares $(x, y) \in \mathbb{Z}_p^2$ deste conjunto para o intervalo $[1, 2p^2]$.

- Usamos a aplicação $\varphi : \mathbb{Z}_p^2 \to \mathbb{N}$ tal que $\varphi(x, y) = 1 + x + 2py$.
- É possível mostrar que esta aplicação preserva a propriedade de Sidon!
- Estes subconjuntos de Sidon do intervalo $[1, 2p^2]$ têm p elementos - conseguimos obter uma densidade de $\frac{p}{2p^2}$, que já vimos que é o melhor possível a menos de uma constante.

Ausência de Estrutura

Definição

Dados dois conjuntos A, B, definimos o conjunto soma $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

Ausência de Estrutura

Definição

Dados dois conjuntos A, B, definimos o conjunto soma $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

Exemplos:

Ausência de Estrutura

Definição

Dados dois conjuntos A, B, definimos o conjunto soma $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

Exemplos:

- $A = B = \{1, 2, \cdots, n\}$, temos $A + B = \{2, 3, \cdots, 2n\}$ (linear).

Ausência de Estrutura

Definição

Dados dois conjuntos A, B, definimos o conjunto soma $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

Exemplos:

- $A = B = \{1, 2, \cdots, n\}$, temos $A + B = \{2, 3, \cdots, 2n\}$ (linear).
- $A = B = \{1, 2, 4, 8\}$, temos $A + B = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 16\}$ (quadrático).

Ausência de Estrutura

Teorema

Existe uma constante C tal que se S é um conjunto de Sidon, então para qualquer conjunto B tal que $|S| = |B| = n$ tem-se

$$|S + B| \geq Cn^2.$$

Ausência de Estrutura

Teorema

Existe uma constante C tal que se S é um conjunto de Sidon, então para qualquer conjunto B tal que $|S| = |B| = n$ tem-se

$$|S + B| \geq Cn^2.$$

Demonstração.

Seja $B = \{b_1, \cdots, b_n\}$. Seja $B_i = \{s + b_i : s \in S\}$. Por inclusão-exclusão,

$$|S + B| = |B_1 \cup \cdots \cup B_n| \geq \sum_{1 \leq i \leq n} |B_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |B_i \cap B_j|$$

$\square$

Ausência de Estrutura

Demonstração.

Observamos $|B_i \cap B_j| \leq 1$. Isto porque se a interseção tivesse 2 elementos, teríamos $s_1 + b_i = s_2 + b_j$ e $s_3 + b_i = s_4 + b_j$, ou seja, $s_1 + s_4 = s_2 + s_3$. Portanto,

Ausência de Estrutura

Demonstração.

Observamos $|B_i \cap B_j| \leq 1$. Isto porque se a interseção tivesse 2 elementos, teríamos $s_1 + b_i = s_2 + b_j$ e $s_3 + b_i = s_4 + b_j$, ou seja, $s_1 + s_4 = s_2 + s_3$. Portanto,

$$\sum_{1 \leq i \leq n} |B_i| - \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} |B_i \cap B_j|$$
$$\geq n^2 - \binom{n}{2}$$
$$\geq \frac{n^2}{2}.$$

$\square$

Sidon nos Reais

A definição de conjunto de Sidon pode obviamente ser extendida para subconjuntos de reais.

Sidon nos Reais

A definição de conjunto de Sidon pode obviamente ser extendida para subconjuntos de reais.

- Exemplo: $A = \{log(p) : p \text{ primo}\}$.

Sidon nos Reais

A definição de conjunto de Sidon pode obviamente ser extendida para subconjuntos de reais.

- Exemplo: $A = \{log(p) : p \text{ primo}\}$.

Questão

Dado um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ de reais, será que conseguimos encontrar um conjunto próximo de A que seja de Sidon?

Perturbações

Definição

Uma ε-perturbação de um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ é $f(A)$, onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função que satisfaz $|f(x) - x| < \varepsilon$ para todo o $x \in A$.

Ou seja, é um conjunto de pontos *muito perto* dos pontos de A.
A pergunta pode ser então formulada da seguinte forma:

Perturbações

Definição

Uma ε-perturbação de um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ é $f(A)$, onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função que satisfaz $|f(x) - x| < \varepsilon$ para todo o $x \in A$.

Ou seja, é um conjunto de pontos *muito perto* dos pontos de A. A pergunta pode ser então formulada da seguinte forma:

Questão

Dado um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ de reais, será que conseguimos encontrar uma ε-perturbação de A de Sidon?

Perturbações de Sidon

Teorema

Se A é um conjunto finito, existe uma ε-perturbação de A de Sidon.

Perturbações de Sidon

Teorema

Se A é um conjunto finito, existe uma ε-perturbação de A de Sidon.

Demonstração.

Prova-se com indução no número de elementos. O caso base $|A| = 1$ é trivial.

Perturbações de Sidon

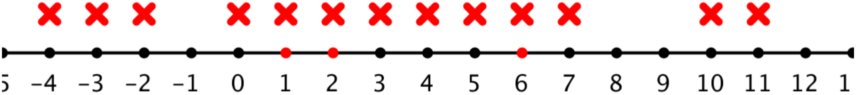
Teorema

Se A é um conjunto finito, existe uma ε-perturbação de A de Sidon.

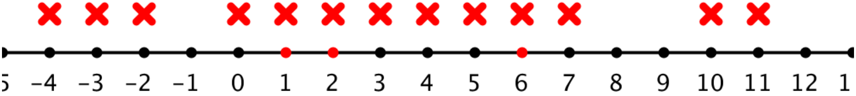
Demonstração.

Prova-se com indução no número de elementos. O caso base $|A| = 1$ é trivial.
A ideia central do passo de indução é observar que podemos acrescentar um ponto à ε-perturbação facilmente, já que quase todos os reais podem ser acrescentados sem quebrar a propriedade de Sidon. $\square$

Perturbações de Sidon

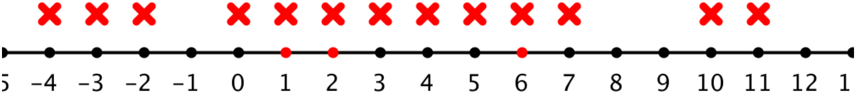


Perturbações de Sidon



Números "maus": $a_i + a_j - a_k$ e $\frac{a_i+a_j}{2}$.

Perturbações de Sidon



Números "maus": $a_i + a_j - a_k$ e $\frac{a_i+a_j}{2}$.

Este resultado pode ser extendido para incluir conjuntos A numeráveis (o argumento indutivo funciona da mesma maneira).

Sidon Não-numerável

Questão

Existem perturbações de Sidon de conjuntos não-numeráveis?

Sidon Não-numerável

Questão

Existem perturbações de Sidon de conjuntos não-numeráveis?

Questão

Existem conjuntos de Sidon não-numeráveis?

Sidon Não-numerável

Questão

Existem perturbações de Sidon de conjuntos não-numeráveis?

Questão

Existem conjuntos de Sidon não-numeráveis?

A resposta a esta última pergunta é sim.

Sidon não-numerável

Teorema

Existe um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ de Sidon não-numerável.

Sidon não-numerável

Teorema

Existe um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ de Sidon não-numerável.

Demonstração.

- $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial de dimensão infinita sobre $\mathbb{Q}$.

Sidon não-numerável

Teorema

Existe um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ de Sidon não-numerável.

Demonstração.

- $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial de dimensão infinita sobre $\mathbb{Q}$.
- Basta escolher uma base (não-numerável) deste espaço.

Sidon não-numerável

Teorema

Existe um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ de Sidon não-numerável.

Demonstração.

- $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial de dimensão infinita sobre $\mathbb{Q}$.
- Basta escolher uma base (não-numerável) deste espaço.
- Se a_1, a_2, a_3, a_4 são vetores da base, então é impossível termos $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$, já que isto implicaria que a_1, a_2, a_3, a_4 são linearmente dependentes.

$\square$

Sidon não-numerável

Teorema

Existe um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ de Sidon não-numerável.

Demonstração.

- $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial de dimensão infinita sobre $\mathbb{Q}$.
- Basta escolher uma base (não-numerável) deste espaço.
- Se a_1, a_2, a_3, a_4 são vetores da base, então é impossível termos $a_1 + a_2 = a_3 + a_4$, já que isto implicaria que a_1, a_2, a_3, a_4 são linearmente dependentes.

□

No entanto, o resultado que todos os espaços vetoriais têm uma base é equivalente ao axioma da escolha. Existirá alguma construção mais fácil de um tal conjunto?

Trabalho para Casa

Problema

Existem conjuntos de Sidon densos em $\mathbb{R}$?

O Fim

Obrigado

Referências

- Gowers, Timothy. (2012). *What are dense Sidon subsets of* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *like?*. `https://gowers.wordpress.com/2012/07/13/what-are-dense-sidon-subsets-of-12-n-like/`
- Nathanson, Melvyn B. (2020). *Sidon Sets and Perturbations*. `arXiv:1707.04522`