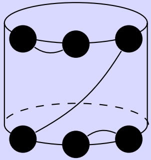
Cálculos com Cilindros

Francisco Teixeira

FCUP



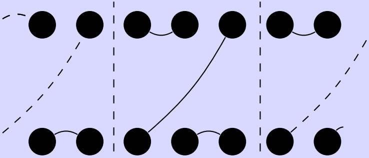
6 de Março 2021

Vai-se trabalhar numa álgebra de diagramas cilíndricos sobre um corpo $\mathbb{K}$, existindo em certos casos uma estrutura $\mathbb{K}[\lambda]$.
Por outras palavras, vamos estar a trabalhar com combinações $\mathbb{K}$-lineares de **n-diagramas**. Chamamos a este conjunto de elementos, D_n

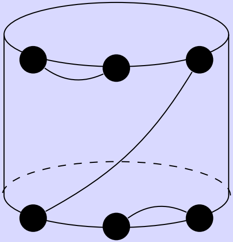
Vejamos a definição de um diagrama:
Um n -diagrama "affine"consiste em duas linhas horizontais infinitas em que estão os nós correspondentes a $\mathbb{Z} \times \{0, 1\}$ e arestas que os ligam, satisfazendo as condições:

- Cada nó é o fim de uma (e só uma) aresta (não há nós que não passam por arestas)
- Todas as arestas são curvas em $\mathbb{R} \times [0, 1]$
- Se uma aresta não liga dois nós, é uma reta horizontal que não toca em nenhum nó. Só há um número finito destas arestas
- Arestas não se intercetam
- Os diagramas são invariantes por translação horizontal de ordem n

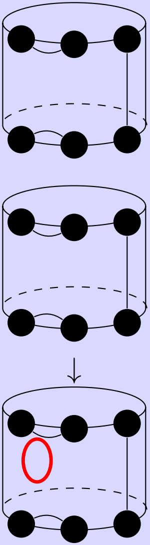
Visualmente:

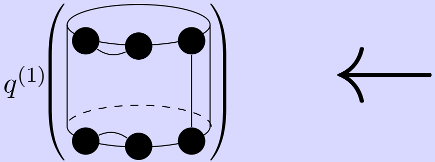


Podemos visualizar isto como:

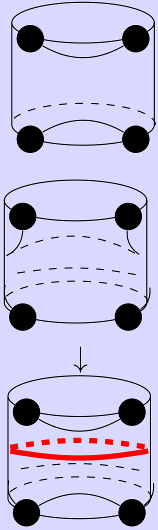


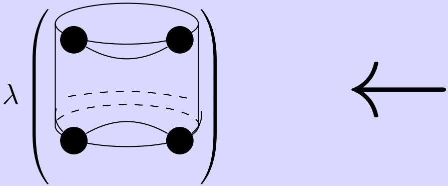
Podemos definir uma operação de "multiplicação"entre os cilindros. Tendo dois cilindros A e B, AB é o diagrama resultante de colocar A no topo de B e prolongar as curvas. Pode eventualmente resultar em lacetes, que vamos representar como um elemento q^x onde x é o número de lacetes





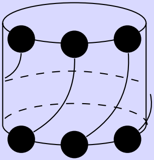
Note-se que, caso estejamos a trabalhar com n par, pode ainda surgir uma curva que circula à volta do cilindro. Iremos representar esse elemento como λ e trabalhá-lo de maneira semelhante a q.





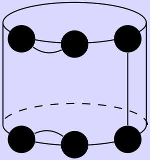
Aproveitamos para definir dois elementos muito importantes:

$\mathcal{T}$



Corresponde a ligar o nó de baixo i ao $\overline{i+1} (\mod n)$ de cima

E_i (neste caso $i = 1$)



Corresponde a ligar, em cima e em baixo os elementos i ao $\overline{i+1} (\mod n)$ e enviar qualquer outro nó j em cima no nó j em baixo

É possível representar qualquer diagrama de D_n compondo $\mathcal{T}, \mathcal{T}^{-1}$ (isto é, o mesmo que $\mathcal{T}$ mas com o sentido oposto) e E_1, para qualquer n (!)

Problema: Qual o centro de D_n?

Problema: Qual o centro de D_n?
Vamos considerar os casos:

$n = 2$ e $n = 3$

Problema: Qual o centro de D_n?
Vamos considerar os casos:

$n = 2$	e	$n = 3$
$\downarrow$		$\downarrow$
Propriedades estranhas (não está bem nas definições)		Propriedades fáceis ("1º caso próprio")

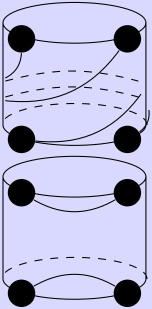
Vamos começar primeiro por atacar o caso $n = 2$

Algumas propriedades interessantes:

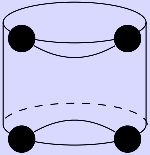
$$\mathcal{T}E_i = E_{\overline{i+1}}\mathcal{T} \quad \to \text{ Válido para todo } n \geq 2$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{T}^2 E_i = E_i \\ &E_1E_2 = \mathcal{T}\lambda E_2 \\ &E_2E_1 = \mathcal{T}\lambda E_1 \end{aligned}\right\} \text{ Válido em } n = 2$$

Por exemplo, a segunda propriedade:

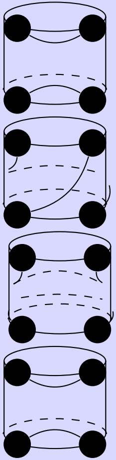


$$=$$

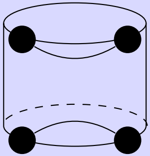


Vejamos um exemplo da utilização destas propriedades em ação. Em $n = 2$

$$
\begin{aligned}
E_1\mathcal{T}^3E_2\mathcal{T}^2E_1 &= \\
E_1\mathcal{T}^3E_2E_1 &= \\
E_1\mathcal{T}E_2E_1 &= \\
q\mathcal{T}E_2E_1 &= \\
q\lambda\mathcal{T}\mathcal{T}E_1 &= \\
q\lambda E_1 &
\end{aligned}
$$



$\longrightarrow$ $q\lambda$



Qualquer diagrama é composto de E_1 e $\mathcal{T}$. Isto é, é uma **palavra** formada por E_1 e $\mathcal{T}$
Usando as propriedades acima vistas, **reduzimos** cada palavra a algo como $\alpha\mathcal{T}^k E_i$ ou $\beta\mathcal{T}^k$, com $\alpha \in \mathbb{K}[\lambda], \beta \in \mathbb{K}$

Considerando ainda que $\mathcal{T}^2 E_i = E_i$ temos que qualquer elemento de D_2 pode ser escrito como:

$$\boxed{aE_1 + bE_2 + c\mathcal{T}E_1 + d\mathcal{T}E_2 + \sum e_i\mathcal{T}^{k_i}}$$

Para $a, b, c, d \in \mathbb{K}[\lambda]$ e $e_i \in \mathbb{K}$

Ora, $A \in Z(D_2) \Leftrightarrow A$ comuta com $\mathcal{T}$ e A comuta com E_1

Pelo que podemos encontrar os elementos do centro encontrando os elementos que comutam com $\mathcal{T}$ e ver quais destes comutam com E_1

Comutar com $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T}A = A\mathcal{T}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}A &= a\mathcal{T}E_1 + b\mathcal{T}E_2 + c\mathcal{T}\mathcal{T}E_1 + d\mathcal{T}\mathcal{T}E_2 \\ &= a\mathcal{T}E_1 + b\mathcal{T}E_2 + cE_1 + dE_2\end{aligned}$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}A\mathcal{T} &= aE_1\mathcal{T} + bE_2\mathcal{T} + c\mathcal{T}E_1\mathcal{T} + d\mathcal{T}E_2\mathcal{T} \\ &= a\mathcal{T}E_2 + b\mathcal{T}E_1 + cE_2 + dE_1 \\ &= b\mathcal{T}E_1 + a\mathcal{T}E_2 + dE_1 + cE_2\end{aligned}$$

Ou seja, c = d $\quad e \quad$ a = b

Assim, resumindo tudo, para A comutar com $\mathcal{T}$, tem de ser da forma:

$$A = aE_1 + aE_2 + b\mathcal{T}E_1 + b\mathcal{T}E_2 + \sum c_i \mathcal{T}^{k_i}$$

Usando essa informação, para comutar com E_1:

$$
\begin{aligned}
AE_1 \quad &= \\
&aE_1E_1 + aE_2E_1 + b\mathcal{T}E_1E_1 + \\
&b\mathcal{T}E_2E_1 + \sum c_i\mathcal{T}^{2k_i+1}E_1 + \sum d_i\mathcal{T}^{2w_i}E_1 \\
&= \\
&aqE_1 + a\lambda\mathcal{T}E_1 + bq\mathcal{T}E_1 + \\
&b\lambda E_1 + \sum c_i\mathcal{T}E_1 + \sum d_iE_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_1A \quad &= \\
&aE_1E_1 + aE_1E_2 + bE_1\mathcal{T}E_1 + \\
&bE_1\mathcal{T}E_2 + \sum c_iE_1\mathcal{T}^{2k_i+1} + \sum d_iE_1\mathcal{T}^{2w_i} \\
&= \\
&aqE_1 + a\mathcal{T}\lambda E_2 + b\lambda E_1 + \\
&bq\mathcal{T}E_2 + \sum c_i\mathcal{T}E_2 + \sum d_iE_1
\end{aligned}
$$

Ou seja:

$$(aq + b\lambda + \sum d_i)E_1 + (a\lambda + bq + \sum c_i)\mathcal{T}E_1$$
$$=$$
$$(aq + b\lambda + \sum d_i)E_1 + (a\lambda + bq + \sum c_i)\mathcal{T}E_2$$

Donde sai que:

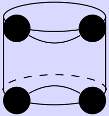
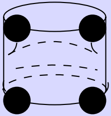
$$a\lambda + bq + \sum c_i = 0$$

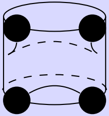
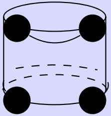
E ficamos com um centro (não muito bonito...)

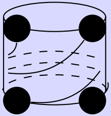
$$
\boxed{
\begin{array}{c}
Z(D_2) = \\[2em]
\left\{ \begin{array}{ccc}
aE_1 + aE_2 + b\mathcal{T}E_1 + b\mathcal{T}E_2 & & a, b, \in \mathbb{K}[\lambda], c_i, d_i \in \mathbb{K} \\
+\sum c_i \mathcal{T}^{2k_i+1} + \sum d_i \mathcal{T}^{2z_i} & : & \text{e } a\lambda + bq + \sum c_i = 0
\end{array} \right\}
\end{array}
}
$$

$$Z(D_2) =$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} aE_1 + aE_2 + b\mathcal{T}E_1 + b\mathcal{T}E_2 & & a, b, \in \mathbb{K}[\lambda], c_i, d_i \in \mathbb{K} \\ +\sum c_i \mathcal{T}^{2k_i+1} + \sum d_i \mathcal{T}^{2z_i} & : & \text{e } a\lambda + bq + \sum c_i = 0 \end{array} \right\}$$

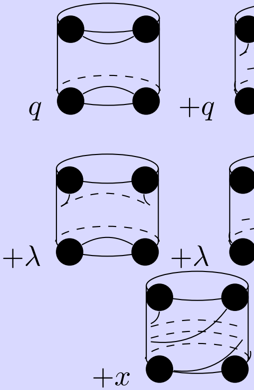
q  $+q$ 

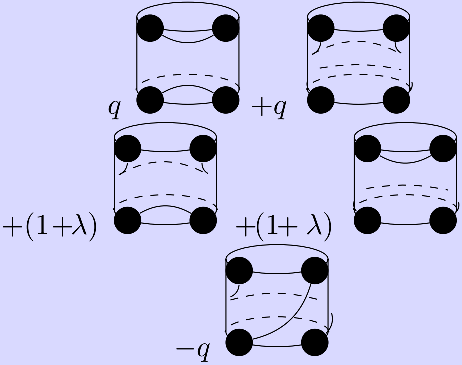
$+\lambda$  $+\lambda$ 

$+x$ 

$$Z(D_2) =$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} aE_1 + aE_2 + b\mathcal{T}E_1 + b\mathcal{T}E_2 & & a, b, \in \mathbb{K}[\lambda], c_i, d_i \in \mathbb{K} \\ +\sum c_i \mathcal{T}^{2k_i+1} + \sum d_i \mathcal{T}^{2z_i} & : & \text{e } a\lambda + bq + \sum c_i = 0 \end{array} \right\}$$





Tratemos agora do caso $n = 3$.
Aqui não temos as mesmas propriedades fáceis, mas ainda conseguimos simplificar o suficiente!

Ainda temos que $\mathcal{T}E_i = E_{\overline{i+1}}\mathcal{T}$ e, de facto, surge outra propriedade útil:

$$E_{\overline{i+2}}E_1 = \mathcal{T}^2 E_i$$

Temos também outra propriedade particular em D_3:

$$E_{\overline{i+1}}E_i = \mathcal{T}^{-2} E_i$$

Como $\mathcal{T}E_i\mathcal{T}^{-1} = E_{\overline{i+1}}$, por manipulação algébrica, basta ver estas proposições no caso $i = 1$

Desta maneira, podemos reduzir cada palavra formada pelos E_i e $\mathcal{T}$ usando estas propriedades

Qualquer elemento $A \in D_3$ é então da forma:

$$A = \sum a_i \mathcal{T}^{x_i} E_1 + \sum b_i \mathcal{T}^{y_i} E_2 + \sum c_i \mathcal{T}^{z_i} E_3 + \sum d_i \mathcal{T}^{w_i}$$

Comutar com $\mathcal{T}$ (não se vai contar com os termos $\sum d_i \mathcal{T}^{w_i}$ já que esses comutam obviamente) :

$$\mathcal{T}A =$$
$$\boxed{\sum a_i \mathcal{T}^{x_i+1}} E_1 + \boxed{\sum b_i \mathcal{T}^{y_i+1}} E_2 + \boxed{\sum c_i \mathcal{T}^{z_i+1}} E_3$$

$$A\mathcal{T} =$$
$$\sum a_i \mathcal{T}^{x_i} E_1 \mathcal{T} + \sum b_i \mathcal{T}^{y_i} E_2 \mathcal{T} + \sum c_i \mathcal{T}^{z_i} E_3 \mathcal{T} =$$
$$\boxed{\sum a_i \mathcal{T}^{x_i+1}} E_3 + \boxed{\sum b_i \mathcal{T}^{y_i+1}} E_1 + \boxed{\sum c_i \mathcal{T}^{z_i+1}} E_2$$

Ou seja, $$\boxed{\sum a_i \mathcal{T}^{x_i}} = \boxed{\sum b_i \mathcal{T}^{y_i}} = \boxed{\sum c_i \mathcal{T}^{z_i}}$$

Para comutar com $\mathcal{T}$ temos que A é da forma:

$$A = \sum a_i \mathcal{T}^{x_i} (E_1 + E_2 + E_3) + \sum b_i \mathcal{T}^{y_i}$$

E quais destes comutam com E_1?

Tal como em D_2 vamos dividir em classes, neste caso $\mod 3$.
Para facilitar, vamos escrever:

$$\sum a_i \mathcal{T}^{x_i} = \underbrace{\sum r_i \mathcal{T}^{3k_i}}_{R} + \underbrace{\sum s_i \mathcal{T}^{3k_i+1}}_{S} + \underbrace{\sum t_i \mathcal{T}^{3k_i+2}}_{T}$$

Da mesma maneira:

$$\sum b_i \mathcal{T}^{y_i} = \underbrace{\sum f_i \mathcal{T}^{3k_i}}_{F} + \underbrace{\sum g_i \mathcal{T}^{3k_i+1}}_{G} + \underbrace{\sum h_i \mathcal{T}^{3k_i+2}}_{H}$$

Ou seja, temos $A = (R+S+T)(E_1+E_2+E_3) + (F+G+H)$

$$
\begin{aligned}
&E_1 A = \\
&(RE_1 + SE_3 + TE_2)(E_1+E_2+E_3) + (FE_1 + GE_3 + HE_2) = \\
&(\,Rq + S\mathcal{T}^2 + T\mathcal{T}^{-2} + F\,)E_1 + \\
&(\,R\mathcal{T}^2 + S\mathcal{T}^{-2} + Tq + H\,)E_2 + \\
&(\,R\mathcal{T}^{-2} + Sq + T\mathcal{T}^2 + G\,)E_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&AE_1 = \\
&(R+S+T)(E_1E_1 + E_2E_1 + E_3E_1) + (F+G+H)E_1 = \\
&(R+S+T)(qE_1 + \mathcal{T}^{-2}E_1 + \mathcal{T}^2E_1) + (F+G+H)E_1 = \\
&\begin{pmatrix} Rq + S\mathcal{T}^2 + T\mathcal{T}^{-2} + F \\ R\mathcal{T}^2 + S\mathcal{T}^{-2} + Tq + H \\ R\mathcal{T}^{-2} + Sq + T\mathcal{T}^2 + G \end{pmatrix} E_1
\end{aligned}
$$

Donde saem as condições:

$$R\mathcal{T}^2 + S\mathcal{T}^{-2} + Tq + H = 0 \quad \text{e} \quad R\mathcal{T}^{-2} + Sq + T\mathcal{T}^2 + G = 0$$

E cá temos o nosso centro!

$$Z(D_3) = \left\{ \begin{array}{l} (\sum r_i \mathcal{T}^{3k_i} + \sum s_i \mathcal{T}^{3k_i+1} + \sum t_i \mathcal{T}^{3k_i+2}) \\ (E_1 + E_2 + E_3) \\ + \sum f_i \mathcal{T}^{3k_i} + \sum g_i \mathcal{T}^{3k_i+1} + \sum h_i \mathcal{T}^{3k_i+2} \\ \\ : \\ r_i, s_i, t_i, f_i, g_i, h_i \in \mathbb{K} \\ \text{ e} \\ \sum r_i \mathcal{T}^{3k_i+2} + \sum s_i \mathcal{T}^{3k_i-1} + \sum t_i q \mathcal{T}^{3k_i+2} + H = 0 \\ \sum r_i \mathcal{T}^{3k_i-2} + \sum s_i q \mathcal{T}^{3k_i+1} \sum t_i \mathcal{T}^{3k_i+4} + G = 0 \end{array} \right\}$$

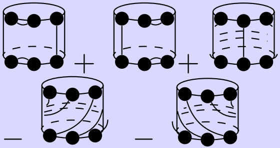
Ou, usando a notação anterior:

$$Z(D_3) =$$

$$\left\{ \begin{matrix} (R+S+T)(E_1+E_2+E_3) \\ + \\ (F+G+H) \end{matrix} : \begin{matrix} RT^2 + ST^{-2} + Tq + H = 0 \\ \text{e} \\ RT^{-2} + Sq + TT^2 + G = 0 \end{matrix} \right\}$$

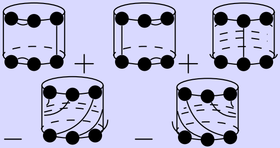
Ou, usando a notação anterior:

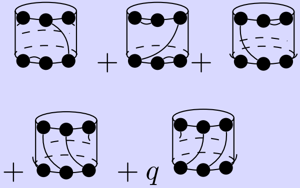
$$Z(D_3) = \left\{ \begin{matrix} (R+S+T)(E_1+E_2+E_3) \\ + \\ (F+G+H) \end{matrix} : \begin{matrix} R\mathcal{T}^2 + S\mathcal{T}^{-2} + Tq + H = 0 \\ \text{e} \\ R\mathcal{T}^{-2} + Sq + T\mathcal{T}^2 + G = 0 \end{matrix} \right\}$$

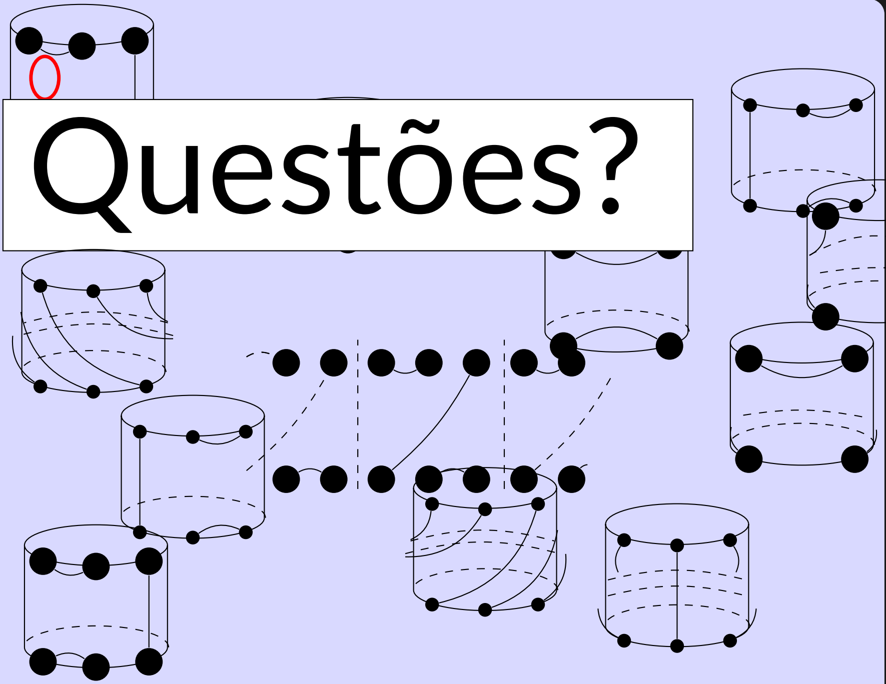


Ou, usando a notação anterior:

$$Z(D_3) = \left\{ \begin{array}{c} (R+S+T)(E_1+E_2+E_3) \\ + \\ (F+G+H) \end{array} : \begin{array}{c} \colorbox{pink}{$R\mathcal{T}^2 + S\mathcal{T}^{-2} + Tq + H = 0$} \\ \text{e} \\ \colorbox{lightgreen}{$R\mathcal{T}^{-2} + Sq + T\mathcal{T}^2 + G = 0$} \end{array} \right\}$$







Questões?