Abordagens a PTIME e a PSPACE via Regras de Reescrita

Stefan Sequeira

FCT

Universidade Nova de Lisboa

28 de Julho

Sistemas de Reescrita

Sistemas de Reescrita

Sistemas de Reescrita

1. $\neg\neg p \to p$

Sistemas de Reescrita

1. $\neg\neg p \rightarrow p$
2. $\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg p \vee \neg q$

Sistemas de Reescrita

1. $\neg\neg p \to p$
2. $\neg(p \wedge q) \to \neg p \vee \neg q$
3. $\neg(p \vee q) \to \neg p \wedge \neg q$

Sistemas de Reescrita

1. $\neg\neg p \rightarrow p$
2. $\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg p \vee \neg q$
3. $\neg(p \vee q) \rightarrow \neg p \wedge \neg q$
4. $(p \wedge q) \vee r \rightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

Sistemas de Reescrita

1. $\neg\neg p \to p$
2. $\neg(p \wedge q) \to \neg p \vee \neg q$
3. $\neg(p \vee q) \to \neg p \wedge \neg q$
4. $(p \wedge q) \vee r \to (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
5. $p \vee (q \wedge r) \to (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Sistemas de Reescrita

1. $\neg\neg p \to p$
2. $\neg(p \wedge q) \to \neg p \vee \neg q$
3. $\neg(p \vee q) \to \neg p \wedge \neg q$
4. $(p \wedge q) \vee r \to (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
5. $p \vee (q \wedge r) \to (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Forma Normal Conjuntiva: Duas expressões booleanas são logicamente equivalentes se ambas se reescrevem na mesma forma normal conjuntiva.

Sistemas de Reescrita

Sistemas de Reescrita

1. $\neg\neg p \to p$
2. $\neg(p \wedge q) \to \neg p \vee \neg q$
3. $\neg(p \vee q) \to \neg p \wedge \neg q$
4. $(p \wedge q) \vee r \to (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
5. $p \vee (q \wedge r) \to (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Sistemas de Reescrita

1. $\neg\neg p \rightarrow p$
2. $\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg p \vee \neg q$
3. $\neg(p \vee q) \rightarrow \neg p \wedge \neg q$
4. $(p \wedge q) \vee r \rightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
5. $p \vee (q \wedge r) \rightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$$\neg(p\vee(q\wedge\neg r)) \stackrel{(3)}{\rightarrow} \neg p\wedge\neg(q\wedge\neg r) \stackrel{(2)}{\rightarrow} \neg p\wedge(\neg q\vee\neg\neg r) \stackrel{(1)}{\rightarrow} \neg p\wedge(\neg q\vee r)$$

Sistemas de Reescrita

Sistemas de Reescrita

$\mathcal{F}$ símbolos de funções

Sistemas de Reescrita

$\mathcal{F}$ símbolos de funções

$\mathcal{F} = \cup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$, $\mathcal{F}_n$ símbolos de funções de aridade n.

Sistemas de Reescrita

$\mathcal{F}$ símbolos de funções

$\mathcal{F} = \cup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$, $\mathcal{F}_n$ símbolos de funções de aridade n.

$\mathcal{X}$ símbolos de variáveis

Sistemas de Reescrita

$\mathcal{F}$ símbolos de funções

$\mathcal{F} = \cup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$, $\mathcal{F}_n$ símbolos de funções de aridade n.

$\mathcal{X}$ símbolos de variáveis

$\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ conjunto dos termos sobre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{X}$

Sistemas de Reescrita

$\mathcal{F}$ símbolos de funções

$\mathcal{F} = \cup_{n\geq 0}\mathcal{F}_n$, $\mathcal{F}_n$ símbolos de funções de aridade n.

$\mathcal{X}$ símbolos de variáveis

$\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{X})$ conjunto dos termos sobre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{X}$

- $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{X})$

Sistemas de Reescrita

$\mathcal{F}$ símbolos de funções

$\mathcal{F} = \cup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$, $\mathcal{F}_n$ símbolos de funções de aridade n.

$\mathcal{X}$ símbolos de variáveis

$\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ conjunto dos termos sobre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{X}$

- $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall f \in \mathcal{F} : f \text{ tem aridade } n,\ \forall t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X}),\ f(t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$

Sistemas de Reescrita

$\mathcal{F}$ símbolos de funções

$\mathcal{F} = \cup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$, $\mathcal{F}_n$ símbolos de funções de aridade n.

$\mathcal{X}$ símbolos de variáveis

$\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ conjunto dos termos sobre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{X}$

- $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall f \in \mathcal{F} : f \text{ tem aridade } n,\ \forall t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X}),\ f(t_1, ..., t_n) \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$

$\mathcal{F}_0 = \{false, true\}$, $\mathcal{F}_1 = \{\neg\}$, $\mathcal{F}_2 = \{\vee, \wedge\}$

Sistemas de Reescrita

$\mathcal{F}$ símbolos de funções

$\mathcal{F} = \cup_{n \geq 0} \mathcal{F}_n$, $\mathcal{F}_n$ símbolos de funções de aridade n.

$\mathcal{X}$ símbolos de variáveis

$\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ conjunto dos termos sobre $\mathcal{F}$ e $\mathcal{X}$

- $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall f \in \mathcal{F} : f \text{ tem aridade } n,\ \forall t_1, ..., t_n \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X}),\ f(t_1, ..., t_n) \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$

$\mathcal{F}_0 = \{false, true\}$, $\mathcal{F}_1 = \{\neg\}$, $\mathcal{F}_2 = \{\vee, \wedge\}$

$\mathcal{F} = \{false, true, \neg, \vee, \wedge\}$, $\mathcal{X} = \{p, q, r\}$

Sistemas de Reescrita

Sistemas de Reescrita

$\mathcal{G}(\mathcal{F}) = \mathcal{T}(\mathcal{F}, \emptyset)$: Conjunto dos *ground terms*, o conjunto dos termos sem variáveis.

Sistemas de Reescrita

$\mathcal{G}(\mathcal{F}) = \mathcal{T}(\mathcal{F}, \emptyset)$: Conjunto dos *ground terms*, o conjunto dos termos sem variáveis.

$$\neg(\mathit{true} \vee (\mathit{false} \wedge \neg \mathit{true}))$$

Sistemas de Reescrita

$\mathcal{G}(\mathcal{F}) = \mathcal{T}(\mathcal{F}, \emptyset)$: Conjunto dos *ground terms*, o conjunto dos termos sem variáveis.

$$\neg(\mathit{true} \vee (\mathit{false} \wedge \neg \mathit{true}))$$

Substituição: $\sigma' : \mathcal{X} \longrightarrow T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$

Sistemas de Reescrita

$\mathcal{G}(\mathcal{F}) = \mathcal{T}(\mathcal{F}, \emptyset)$: Conjunto dos *ground terms*, o conjunto dos termos sem variáveis.

$$\neg(\mathit{true} \vee (\mathit{false} \wedge \neg \mathit{true}))$$

Substituição: $\sigma' : \mathcal{X} \longrightarrow T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$

$\sigma : T(\mathcal{F}, \mathcal{X}) \longrightarrow T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$

- $\sigma(x) = \sigma'(x)$

Sistemas de Reescrita

$\mathcal{G}(\mathcal{F}) = \mathcal{T}(\mathcal{F}, \emptyset)$: Conjunto dos *ground terms*, o conjunto dos termos sem variáveis.

$$\neg(\mathit{true} \vee (\mathit{false} \wedge \neg\mathit{true}))$$

Substituição: $\sigma' : \mathcal{X} \longrightarrow T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$

$\sigma : T(\mathcal{F}, \mathcal{X}) \longrightarrow T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$

- $\sigma(x) = \sigma'(x)$
- $\sigma(f(t_1, ..., t_n)) = f(\sigma(t_1), ..., \sigma(t_n))$

Sistemas de Reescrita

$\mathcal{G}(\mathcal{F}) = \mathcal{T}(\mathcal{F}, \emptyset)$: Conjunto dos *ground terms*, o conjunto dos termos sem variáveis.

$$\neg(true \vee (false \wedge \neg true))$$

Substituição: $\sigma' : \mathcal{X} \longrightarrow T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$

$\sigma : T(\mathcal{F}, \mathcal{X}) \longrightarrow T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$

- $\sigma(x) = \sigma'(x)$
- $\sigma(f(t_1, ..., t_n)) = f(\sigma(t_1), ..., \sigma(t_n))$

$$t\sigma$$

Sistemas de Reescrita

Sistemas de Reescrita

$\mathcal{F} = \{false, true, \neg, \vee, \wedge\}$, $\mathcal{X} = \{p, q, r\}$

Sistemas de Reescrita

$\mathcal{F} = \{false, true, \neg, \vee, \wedge\}$, $\mathcal{X} = \{p, q, r\}$

$$p\sigma = true$$
$$q\sigma = false \wedge \neg true$$
$$r\sigma = \neg(\neg false \vee (\neg true \wedge false))$$

Sistemas de Reescrita

$$\mathcal{F} = \{false, true, \neg, \vee, \wedge\},\ \mathcal{X} = \{p, q, r\}$$

$$\begin{aligned} p\sigma &= true \\ q\sigma &= false \wedge \neg true \\ r\sigma &= \neg(\neg false \vee (\neg true \wedge false)) \end{aligned}$$

$$(\neg(p \vee q))\sigma = \neg((p \vee q)\sigma) = \neg(p\sigma \vee q\sigma) = \neg(true \vee (false \wedge \neg true))$$

Sistemas de Reescrita

Sistemas de Reescrita

R sistema de reescrita: Relação binária em $\mathcal{T}(\mathcal{X}, \mathcal{F})$

Sistemas de Reescrita

R sistema de reescrita: Relação binária em $\mathcal{T}(\mathcal{X}, \mathcal{F})$

$\rightarrow_R$ relação de reescrita: fecho de R para substituições e contextos:

Sistemas de Reescrita

R sistema de reescrita: Relação binária em $\mathcal{T}(\mathcal{X}, \mathcal{F})$

$\rightarrow_R$ relação de reescrita: fecho de R para substituições e contextos:

- Se $l \rightarrow_R r$ e se σ é uma substituição, então $l\sigma \rightarrow_R r\sigma$;

Sistemas de Reescrita

R sistema de reescrita: Relação binária em $\mathcal{T}(\mathcal{X}, \mathcal{F})$

$\to_R$ relação de reescrita: fecho de R para substituições e contextos:

- Se $l \to_R r$ e se σ é uma substituição, então $l\sigma \to_R r\sigma$;
- Se $f \in \mathcal{F}$ é tal que f tem aridade n, com $n \in \mathbb{N}$, se $t_1, \ldots, t_k, \ldots, t_n \in T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$, com $k \in \mathbb{N}$, e se $t_k \to_R t'_k$, então $f(t_1, \ldots, t_k, \ldots, t_n) \to_R f(t_1, \ldots, t'_k, \ldots, t_n)$

Sistemas de Reescrita

Sistemas de Reescrita

R sistema de reescrita que termina: Não existe uma sucessão de termos infinita $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}\ t_n \rightarrow_R t_{n+1}$

Sistemas de Reescrita

R sistema de reescrita que termina: Não existe uma sucessão de termos infinita $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}\ t_n \to_R t_{n+1}$

R sistema de escrita confluente: $\forall s, t, u \in T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$,
$s \to_R \ldots \to_R t \wedge s \to_R \ldots \to_R u$, $\exists v \in T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$
$t \to_R \ldots \to_R v \wedge u \to_R \ldots \to_R v$

Sistemas de Reescrita

R sistema de reescrita que termina: Não existe uma sucessão de termos infinita $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}\ t_n \rightarrow_R t_{n+1}$

R sistema de escrita confluente: $\forall s, t, u \in T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$,
$s \rightarrow_R \ldots \rightarrow_R t \wedge s \rightarrow_R \ldots \rightarrow_R u$, $\exists v \in T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$
$t \rightarrow_R \ldots \rightarrow_R v \wedge u \rightarrow_R \ldots \rightarrow_R v$

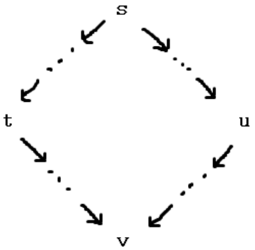


Figure: Representação da confluência

Sistemas de Reescrita

Sistemas de Reescrita

$t \in T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ forma normal: $\nexists u \in T(\mathcal{F}, \mathcal{X}) : \; t \rightarrow_R u$.

Sistemas de Reescrita

$t \in T(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ forma normal: $\nexists u \in T(\mathcal{F}, \mathcal{X}) : \; t \rightarrow_R u$.

terminação + confluência $\Rightarrow$ Para todo o termo t, existe um termo u tal que u é uma forma normal e $t \rightarrow_R \ldots \rightarrow_R u$

Sistemas de Reescrita

Sistemas de Reescrita

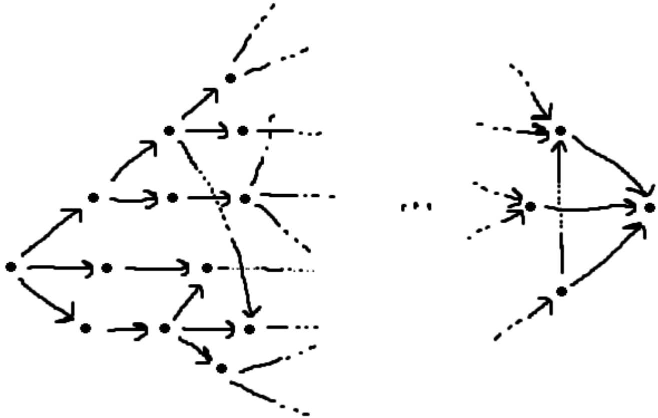


Figure: Confluência e terminação: A reescrita em si pode não ser determinística, mas o resultado final é atingido e é sempre o mesmo para o mesmo termo inicial.

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

$\mathcal{C}$ classe de complexidade de funções recursivas.

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

$\mathcal{C}$ classe de complexidade de funções recursivas.

Funções em geral definidas por recursão, como por exemplo

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

$\mathcal{C}$ classe de complexidade de funções recursivas.

Funções em geral definidas por recursão, como por exemplo

5. **(Recursões na Notação)**

$$\begin{aligned} f(\epsilon, \bar{x}; \bar{y}) &= g(\bar{x}; \bar{y}) \\ f(zi, \bar{x}; \bar{y}) &= h_i(z, \bar{x}; \bar{y}, f(z, \bar{x}; \bar{y})), \quad i = 0, 1 \end{aligned}$$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

$\mathcal{C}$ classe de complexidade de funções recursivas.

Funções em geral definidas por recursão, como por exemplo

5. **(Recursões na Notação)**

$$\begin{array}{rcl} f(\epsilon, \bar{x}; \bar{y}) & = & g(\bar{x}; \bar{y}) \\ f(zi, \bar{x}; \bar{y}) & = & h_i(z, \bar{x}; \bar{y}, f(z, \bar{x}; \bar{y})), \quad i = 0, 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \wedge(\epsilon; x) & = & \pi_1^{;1}(; x) \\ \wedge(yi; x) & = & S_i(; \pi_3^{1;2}(y; x, \wedge(y; x))), \ i = 0, 1 \end{array}$$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

$\mathcal{C}$ classe de complexidade de funções recursivas.

Funções em geral definidas por recursão, como por exemplo

5. **(Recursões na Notação)**

$$\begin{aligned} f(\epsilon, \bar{x}; \bar{y}) &= g(\bar{x}; \bar{y}) \\ f(zi, \bar{x}; \bar{y}) &= h_i(z, \bar{x}; \bar{y}, f(z, \bar{x}; \bar{y})), \quad i = 0, 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \wedge(\epsilon; x) &= \pi_1^{;1}(; x) \\ \wedge(yi; x) &= S_i(; \pi_3^{1;2}(y; x, \wedge(y; x))), \; i = 0, 1 \end{aligned}$$

$R_{\mathcal{C}}$ sistema de reescrita que inclui a(s) igualdade(s) como regra(s):

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

$\mathcal{C}$ classe de complexidade de funções recursivas.

Funções em geral definidas por recursão, como por exemplo

5. **(Recursões na Notação)**

$$\begin{array}{rcl} f(\epsilon, \bar{x}; \bar{y}) & = & g(\bar{x}; \bar{y}) \\ f(zi, \bar{x}; \bar{y}) & = & h_i(z, \bar{x}; \bar{y}, f(z, \bar{x}; \bar{y})), \quad i = 0, 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \wedge(\epsilon; x) & = & \pi_1^{;1}(; x) \\ \wedge(yi; x) & = & S_i(; \pi_3^{1;2}(y; x, \wedge(y; x))), \ i = 0, 1 \end{array}$$

$R_{\mathcal{C}}$ sistema de reescrita que inclui a(s) igualdade(s) como regra(s):

$$\begin{array}{rcl} f(\epsilon, \bar{x}; \bar{y}) & \to_{R_{\mathcal{C}}} & g(\bar{x}; \bar{y}) \\ f(zi, \bar{x}; \bar{y}) & \to_{R_{\mathcal{C}}} & h_i(z, \bar{x}; \bar{y}, f(z, \bar{x}; \bar{y})), \quad i = 0, 1 \end{array}$$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

$\mathcal{C}$ classe de complexidade de funções recursivas.

Funções em geral definidas por recursão, como por exemplo

5. **(Recursões na Notação)**

$$\begin{aligned} f(\epsilon, \bar{x}; \bar{y}) &= g(\bar{x}; \bar{y}) \\ f(zi, \bar{x}; \bar{y}) &= h_i(z, \bar{x}; \bar{y}, f(z, \bar{x}; \bar{y})), \quad i = 0, 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \wedge(\epsilon; x) &= \pi_1^{;1}(; x) \\ \wedge(yi; x) &= S_i(; \pi_3^{1;2}(y; x, \wedge(y; x))), \ i = 0, 1 \end{aligned}$$

$R_{\mathcal{C}}$ sistema de reescrita que inclui a(s) igualdade(s) como regra(s):

$$\begin{aligned} f(\epsilon, \bar{x}; \bar{y}) &\to_{R_{\mathcal{C}}} g(\bar{x}; \bar{y}) \\ f(zi, \bar{x}; \bar{y}) &\to_{R_{\mathcal{C}}} h_i(z, \bar{x}; \bar{y}, f(z, \bar{x}; \bar{y})), \quad i = 0, 1 \end{aligned}$$

Conclui-se que $R_{\mathcal{C}}$ termina e é confluente (*ground terms*).

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

Através da terminação e da confluência, retira-se informação sobre a complexidade computacional das funções de $R_{\mathcal{C}}$.

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

Através da terminação e da confluência, retira-se informação sobre a complexidade computacional das funções de $R_{\mathcal{C}}$.

Tempo: Para cada $l \in \mathbb{N}$ e para cada função de aridade l define-se $\mathcal{D}_{R_{\mathcal{C}},f} := \max\{n : \exists t_1, \ldots, t_n \textit{ ground terms} : t_1 \to_{R_{\mathcal{C}}} \ldots \to_{R_{\mathcal{C}}} t_n \wedge t_1 = f(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_l})\}$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

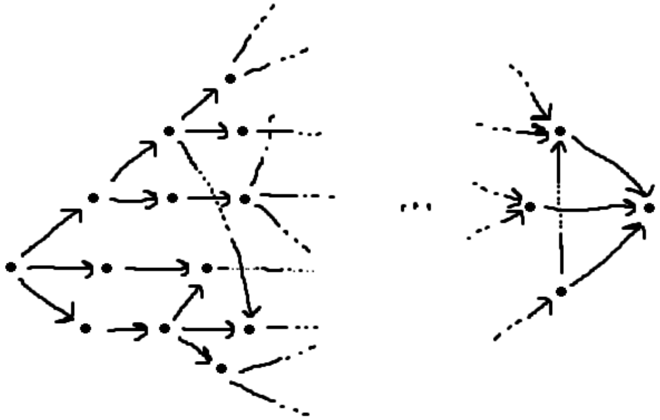
Através da terminação e da confluência, retira-se informação sobre a complexidade computacional das funções de $R_{\mathcal{C}}$.

Tempo: Para cada $l \in \mathbb{N}$ e para cada função de aridade l define-se $\mathcal{D}_{R_{\mathcal{C}},f} := \max\{n : \exists t_1, ..., t_n \textit{ ground terms} : t_1 \rightarrow_{R_{\mathcal{C}}} ... \rightarrow_{R_{\mathcal{C}}} t_n \wedge t_1 = f(\underline{m_1}, ..., \underline{m_l})\}$

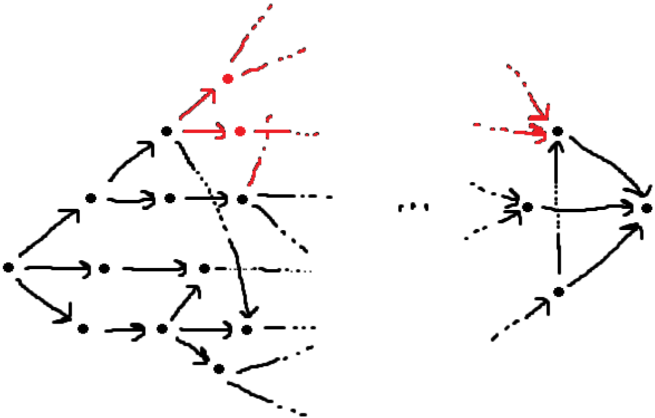
Espaço: Define-se uma função lh dos comprimentos dos símbolos de função, e depois extende-se essa função definindo os comprimentos de um termo qualquer.

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita



Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita



Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. **(Sequência Vazia)** $\mathcal{E}^{k,l}(\bar{x}, \bar{y}) = \epsilon$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. **(Sequência Vazia)** $\mathcal{E}^{k,l}(\bar{x}, \bar{y}) = \epsilon$
2. **(Projeções)** $\mathcal{U}_r^{k,l}(x_1, ..., x_k; x_{k+1}, ..., x_{n+l}) = x_r,\ 1 \leq r \leq k + l$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. **(Sequência Vazia)** $\mathcal{E}^{k,l}(\bar{x}, \bar{y}) = \epsilon$
2. **(Projeções)** $\mathcal{U}_r^{k,l}(x_1, ..., x_k; x_{k+1}, ..., x_{n+l}) = x_r,\ 1 \leq r \leq k + l$
3. **(Sucessores)** $\mathcal{S}_i^{0,1}(; x) = xi,\ i = 0, 1$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. **(Sequência Vazia)** $\mathcal{E}^{k,l}(\bar{x}, \bar{y}) = \epsilon$
2. **(Projeções)** $\mathcal{U}_r^{k,l}(x_1, ..., x_k; x_{k+1}, ..., x_{n+l}) = x_r$, $1 \leq r \leq k + l$
3. **(Sucessores)** $\mathcal{S}_i^{0,1}(; x) = xi$, $i = 0, 1$
4. **(Condicional)** $\mathcal{C}^{0;4}(; \epsilon, y, z_0, z_1) = y$, $\mathcal{C}^{0;4}(; xi, y, z_0, z_1) = z_i$, $i = 0, 1$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. **(Sequência Vazia)** $\mathcal{E}^{k,l}(\bar{x}, \bar{y}) = \epsilon$
2. **(Projeções)** $\mathcal{U}_r^{k,l}(x_1, ..., x_k; x_{k+1}, ..., x_{n+l}) = x_r,\ 1 \leq r \leq k + l$
3. **(Sucessores)** $\mathcal{S}_i^{0,1}(; x) = xi,\ i = 0, 1$
4. **(Condicional)** $\mathcal{C}^{0;4}(; \epsilon, y, z_0, z_1) = y,\ \mathcal{C}^{0;4}(; xi, y, z_0, z_1) = z_i,$ $i = 0, 1$
5. **(Predecessor)** $\mathcal{P}(; \epsilon) = \epsilon,\ \mathcal{P}(; xi) = x,\ i = 0, 1$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. **(Sequência Vazia)** $\mathcal{E}^{k,l}(\bar{x}, \bar{y}) = \epsilon$
2. **(Projeções)** $\mathcal{U}_r^{k,l}(x_1, ..., x_k; x_{k+1}, ..., x_{n+l}) = x_r, \ 1 \leq r \leq k+l$
3. **(Sucessores)** $\mathcal{S}_i^{0,1}(; x) = xi, \ i = 0, 1$
4. **(Condicional)** $\mathcal{C}^{0;4}(; \epsilon, y, z_0, z_1) = y, \ \mathcal{C}^{0;4}(; xi, y, z_0, z_1) = z_i,$ $i = 0, 1$
5. **(Predecessor)** $\mathcal{P}(; \epsilon) = \epsilon, \ \mathcal{P}(; xi) = x, \ i = 0, 1$
6. **(Composições)** $\mathcal{S}UB_{k',l'}^{k,l}[\mathcal{F}, \mathcal{G}_1, ..., \mathcal{G}_{k'}, \mathcal{H}_1, ..., \mathcal{H}_{l'}](\bar{x}; \bar{y}) =$ $\mathcal{F}(\mathcal{G}_1(\bar{x};), ..., \mathcal{G}_{k'}(\bar{x};); \mathcal{H}_1(\bar{x}; \bar{y}), ..., \mathcal{H}_{l'}(\bar{x}; \bar{y}))$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. **(Sequência Vazia)** $\mathcal{E}^{k,l}(\bar{x}, \bar{y}) = \epsilon$
2. **(Projeções)** $\mathcal{U}_r^{k,l}(x_1, ..., x_k; x_{k+1}, ..., x_{n+l}) = x_r,\ 1 \leq r \leq k + l$
3. **(Sucessores)** $\mathcal{S}_i^{0,1}(; x) = xi,\ i = 0, 1$
4. **(Condicional)** $\mathcal{C}^{0;4}(; \epsilon, y, z_0, z_1) = y,\ \mathcal{C}^{0;4}(; xi, y, z_0, z_1) = z_i,$ $i = 0, 1$
5. **(Predecessor)** $\mathcal{P}(; \epsilon) = \epsilon,\ \mathcal{P}(; xi) = x,\ i = 0, 1$
6. **(Composições)** $\mathcal{SUB}_{k',l'}^{k,l}[\mathcal{F}, \mathcal{G}_1, ..., \mathcal{G}_{k'}, \mathcal{H}_1, ..., \mathcal{H}_{l'}](\bar{x}; \bar{y}) =$ $\mathcal{F}(\mathcal{G}_1(\bar{x};), ..., \mathcal{G}_{k'}(\bar{x};); \mathcal{H}_1(\bar{x}; \bar{y}), ..., \mathcal{H}_{l'}(\bar{x}; \bar{y}))$
7. **(Recursões na Notação)**
   $\mathcal{PREC}^{k+1,l}[\mathcal{G}, \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1](\epsilon, \bar{x}; \bar{y}) = \mathcal{G}(\bar{x}; \bar{y}),$
   $\mathcal{PREC}^{k+1,l}[\mathcal{G}, \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1](zi, \bar{x}; \bar{y}) =$
   $\mathcal{H}_i(z, \bar{x}; \bar{y}, \mathcal{PREC}^{k+1,l}[\mathcal{G}, \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1](z, \bar{x}; \bar{y})),\ i = 0, 1$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. **(Sequência Vazia)** $\mathcal{E}^{k,l} \in \mathcal{B}^{k,l}, \forall k, l \in \mathbb{N}$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. **(Sequência Vazia)** $\mathcal{E}^{k,l} \in \mathcal{B}^{k,l}, \forall k, l \in \mathbb{N}$
2. **(Projeções)** $\mathcal{U}_r^{k,l} \in \mathcal{B}^{k,l}, \forall k, l, r \in \mathbb{N} : 1 \leq r \leq k + l$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. **(Sequência Vazia)** $\mathcal{E}^{k,l} \in \mathcal{B}^{k,l}, \forall k, l \in \mathbb{N}$
2. **(Projeções)** $\mathcal{U}_r^{k,l} \in \mathcal{B}^{k,l}, \forall k, l, r \in \mathbb{N} : 1 \leq r \leq k + l$
3. **(Sucessores)** $\mathcal{S}_i^{0,1} \in \mathcal{B}^{0,1},\ i = 0, 1$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. **(Sequência Vazia)** $\mathcal{E}^{k,l} \in \mathcal{B}^{k,l}, \forall k, l \in \mathbb{N}$
2. **(Projeções)** $\mathcal{U}_r^{k,l} \in \mathcal{B}^{k,l}, \forall k, l, r \in \mathbb{N} : 1 \leq r \leq k + l$
3. **(Sucessores)** $\mathcal{S}_i^{0,1} \in \mathcal{B}^{0,1},\ i = 0, 1$
4. **(Condicional)** $\mathcal{C}^{0;4} \in \mathcal{B}^{0,4}$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. **(Sequência Vazia)** $\mathcal{E}^{k,l} \in \mathcal{B}^{k,l}, \forall k, l \in \mathbb{N}$
2. **(Projeções)** $\mathcal{U}_r^{k,l} \in \mathcal{B}^{k,l}, \forall k, l, r \in \mathbb{N} : 1 \leq r \leq k + l$
3. **(Sucessores)** $\mathcal{S}_i^{0,1} \in \mathcal{B}^{0,1},\ i = 0, 1$
4. **(Condicional)** $\mathcal{C}^{0;4} \in \mathcal{B}^{0,4}$
5. **(Predecessor)** $\mathcal{P}^{0;1} \in \mathcal{B}^{0,1}$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. **(Sequência Vazia)** $\mathcal{E}^{k,l} \in \mathcal{B}^{k,l}$, $\forall k, l \in \mathbb{N}$
2. **(Projeções)** $\mathcal{U}_r^{k,l} \in \mathcal{B}^{k,l}$, $\forall k, l, r \in \mathbb{N} : 1 \leq r \leq k + l$
3. **(Sucessores)** $\mathcal{S}_i^{0,1} \in \mathcal{B}^{0,1}$, $i = 0, 1$
4. **(Condicional)** $\mathcal{C}^{0;4} \in \mathcal{B}^{0,4}$
5. **(Predecessor)** $\mathcal{P}^{0;1} \in \mathcal{B}^{0,1}$
6. **(Composições)** Sejam $k, k', l, l' \in \mathbb{N}$, e sejam $\mathcal{F} \in \mathcal{B}^{k',l'}$, $\mathcal{G}_1 \in \mathcal{B}^{k,0}, ..., \mathcal{G}_{k'} \in \mathcal{B}^{k,0}$, $\mathcal{H}_1 \in \mathcal{B}^{k,l}, ..., \mathcal{H}_{l'} \in \mathcal{B}^{k,l}$. Então $\mathcal{S}UB_{k',l'}^{k,l}[\mathcal{F}, \mathcal{G}_1, ..., \mathcal{G}_{k'}, \mathcal{H}_1, ..., \mathcal{H}_{l'}] \in \mathcal{B}^{k,l}$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. **(Sequência Vazia)** $\mathcal{E}^{k,l} \in \mathcal{B}^{k,l}$, $\forall k, l \in \mathbb{N}$
2. **(Projeções)** $\mathcal{U}_r^{k,l} \in \mathcal{B}^{k,l}$, $\forall k, l, r \in \mathbb{N} : 1 \leq r \leq k + l$
3. **(Sucessores)** $\mathcal{S}_i^{0,1} \in \mathcal{B}^{0,1}$, $i = 0, 1$
4. **(Condicional)** $\mathcal{C}^{0;4} \in \mathcal{B}^{0,4}$
5. **(Predecessor)** $\mathcal{P}^{0;1} \in \mathcal{B}^{0,1}$
6. **(Composições)** Sejam $k, k', l, l' \in \mathbb{N}$, e sejam $\mathcal{F} \in \mathcal{B}^{k',l'}$, $\mathcal{G}_1 \in \mathcal{B}^{k,0}, \ldots, \mathcal{G}_{k'} \in \mathcal{B}^{k,0}$, $\mathcal{H}_1 \in \mathcal{B}^{k,l}, \ldots, \mathcal{H}_{l'} \in \mathcal{B}^{k,l}$. Então $\mathcal{S}UB_{k',l'}^{k,l}[\mathcal{F}, \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_{k'}, \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_{l'}] \in \mathcal{B}^{k,l}$
7. **(Recursões na Notação)** Sejam $k, l \in \mathbb{N}$, e sejam $\mathcal{G} \in \mathcal{B}^{k,l}$, $\mathcal{H}_0 \in \mathcal{B}^{k+1,l+1}$ e $\mathcal{H}_1 \in \mathcal{B}^{k+1,l+1}$. Então $\mathcal{P}REC^{k+1,l}[\mathcal{G}, \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1] \in \mathcal{B}^{k+1,l}$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. **(Sequência Vazia)** $\mathcal{E}^{k,l} \in \mathcal{B}^{k,l}$, $\forall k, l \in \mathbb{N}$
2. **(Projeções)** $\mathcal{U}_r^{k,l} \in \mathcal{B}^{k,l}$, $\forall k, l, r \in \mathbb{N} : 1 \leq r \leq k + l$
3. **(Sucessores)** $\mathcal{S}_i^{0,1} \in \mathcal{B}^{0,1}$, $i = 0, 1$
4. **(Condicional)** $\mathcal{C}^{0;4} \in \mathcal{B}^{0,4}$
5. **(Predecessor)** $\mathcal{P}^{0;1} \in \mathcal{B}^{0,1}$
6. **(Composições)** Sejam $k, k', l, l' \in \mathbb{N}$, e sejam $\mathcal{F} \in \mathcal{B}^{k',l'}$, $\mathcal{G}_1 \in \mathcal{B}^{k,0}, \ldots, \mathcal{G}_{k'} \in \mathcal{B}^{k,0}$, $\mathcal{H}_1 \in \mathcal{B}^{k,l}, \ldots, \mathcal{H}_{l'} \in \mathcal{B}^{k,l}$. Então $\mathcal{S}UB_{k',l'}^{k,l}[\mathcal{F}, \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_{k'}, \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_{l'}] \in \mathcal{B}^{k,l}$
7. **(Recursões na Notação)** Sejam $k, l \in \mathbb{N}$, e sejam $\mathcal{G} \in \mathcal{B}^{k,l}$, $\mathcal{H}_0 \in \mathcal{B}^{k+1,l+1}$ e $\mathcal{H}_1 \in \mathcal{B}^{k+1,l+1}$. Então $\mathcal{P}REC^{k+1,l}[\mathcal{G}, \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1] \in \mathcal{B}^{k+1,l}$

$\mathcal{B} := \bigcup_{k,l \in \mathbb{N}} \mathcal{B}^{k,l}$.

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. **(Sequência Vazia)** $E^{k,l} \in B^{k,l}, \forall k, l \in \mathbb{N}$
2. **(Projeções)** $U_r^{k,l} \in B^{k,l}, \forall k, l, r \in \mathbb{N} : 1 \leq r \leq k + l$
3. **(Sucessores)** $S_i^{0,1} \in B^{0,1}$, $i = 0, 1$
4. **(Condicional)** $C^{0;4} \in B^{0,4}$
5. **(Predecessor)** $P^{0;1} \in B^{0,1}$
6. **(Composições)** Sejam $k, k', l, l' \in \mathbb{N}$, e sejam $f \in B^{k',l'}$, $g_1 \in B^{k,0}, \ldots, g_{k'} \in B^{k,0}$, $h_1 \in B^{k,l}, \ldots, h_{l'} \in B^{k,l}$. Então $SUB^{k,l}_{k',l'}[f, g_1, \ldots, g_{k'}, h_1, \ldots, h_{l'}] \in B^{k,l}$
7. **(Recursões na Notação)** Sejam $k, l \in \mathbb{N}$, e sejam $g \in B^{k,l}$, $h_0 \in B^{k+1,l+1}$ e $h_1 \in B^{k+1,l+1}$. Então $PREC^{k+1,l}[g, h_0, h_1] \in B^{k+1,l}$

$B := \bigcup_{k,l \in \mathbb{N}} B^{k,l}$.

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. $lh(E^{k,l}) := 1, \forall k, l \in \mathbb{N}$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. $lh(E^{k,l}) := 1, \forall k, l \in \mathbb{N}$
2. $lh(U_r^{k,l}) := 1, \forall k, l, r \in \mathbb{N} : 1 \leq r \leq k + l$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. $lh(E^{k,l}) := 1, \forall k, l \in \mathbb{N}$
2. $lh(U_r^{k,l}) := 1, \forall k, l, r \in \mathbb{N} : 1 \leq r \leq k + l$
3. $lh(S_i^{0,1}) := 1, \; i = 0, 1$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. $lh(E^{k,l}) := 1, \ \forall k, l \in \mathbb{N}$
2. $lh(U_r^{k,l}) := 1, \ \forall k, l, r \in \mathbb{N} : 1 \leq r \leq k + l$
3. $lh(S_i^{0,1}) := 1, \ i = 0, 1$
4. $lh(C^{0;4}) := 1$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. $lh(E^{k,l}) := 1, \forall k, l \in \mathbb{N}$
2. $lh(U_r^{k,l}) := 1, \forall k, l, r \in \mathbb{N} : 1 \leq r \leq k + l$
3. $lh(S_i^{0,1}) := 1, \ i = 0, 1$
4. $lh(C^{0;4}) := 1$
5. $lh(P^{0;1}) := 1$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. $lh(E^{k,l}) := 1, \forall k, l \in \mathbb{N}$
2. $lh(U_r^{k,l}) := 1, \forall k, l, r \in \mathbb{N} : 1 \leq r \leq k + l$
3. $lh(S_i^{0,1}) := 1, \ i = 0, 1$
4. $lh(C^{0;4}) := 1$
5. $lh(P^{0;1}) := 1$
6. $lh(SUB_{k',l'}^{k,l}[f, g_1, ..., g_{k'}, g_1, ..., h_{l'}]) :=$
   $1 + lh(f) + lh(g_1) + ... + lh(g_{k'}) + lh(h_1) + ... + lh(h_{l'})$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. $lh(E^{k,l}) := 1, \ \forall k, l \in \mathbb{N}$
2. $lh(U_r^{k,l}) := 1, \ \forall k, l, r \in \mathbb{N} : 1 \leq r \leq k + l$
3. $lh(S_i^{0,1}) := 1, \ i = 0, 1$
4. $lh(C^{0;4}) := 1$
5. $lh(P^{0;1}) := 1$
6. $lh(SUB^{k,l}_{k',l'}[f, g_1, ..., g_{k'}, g_1, ..., h_{l'}]) :=$
   $1 + lh(f) + lh(g_1) + ... + lh(g_{k'}) + lh(h_1) + ... + lh(h_{l'})$
7. $lh(PREC^{k+1,l}[g, h_0, h_1]) := 1 + lh(g) + lh(h_0) + lh(h_1)$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

$$
\begin{aligned}
\bigwedge(\epsilon; x) &= \mathcal{U}_1^{0,1}(; x) \\
\bigwedge(yi; x) &= \mathcal{S}_i^{0,1}(; \mathcal{U}_3^{1,2}(y; x, \bigwedge(y; x))), \;\; i = 0, 1
\end{aligned}
$$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

$$
\begin{aligned}
\bigwedge(\epsilon; x) &= \mathcal{U}_1^{0,1}(; x) \\
\bigwedge(yi; x) &= \mathcal{S}_i^{0,1}(; \mathcal{U}_3^{1,2}(y; x, \bigwedge(y; x))), \; i = 0, 1
\end{aligned}
$$

$$
\wedge = PREC[U_1^{0,1}, SUB_{0,1}^{1,2}[S_0^{0,1}, U_3^{1,2}], SUB_{0,1}^{1,2}[S_1^{0,1}, U_3^{1,2}]]
$$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

$$\begin{array}{rcl} \bigwedge(\epsilon; x) & = & \mathcal{U}_1^{0,1}(;x) \\ \bigwedge(yi; x) & = & \mathcal{S}_i^{0,1}(;\mathcal{U}_3^{1,2}(y; x, \bigwedge(y; x))), \ \ i = 0, 1 \end{array}$$

$$\wedge = PREC[U_1^{0,1}, SUB_{0,1}^{1,2}[S_0^{0,1}, U_3^{1,2}], SUB_{0,1}^{1,2}[S_1^{0,1}, U_3^{1,2}]]$$

$$\begin{array}{rcl} lh(\wedge) & = & lh(PREC[U_1^{0,1}, SUB_{0,1}^{1,2}[S_0^{0,1}, U_3^{1,2}], SUB_{0,1}^{1,2}[S_1^{0,1}, U_3^{1,2}]]) \\ & = & 1 + lh(U_1^{0,1}) + lh(SUB_{0,1}^{1,2}[S_0^{0,1}, U_3^{1,2}]) + lh(SUB_{0,1}^{1,2}[S_1^{0,1}, U_3^{1,2}]) \\ & = & 1 + 1 + (1 + lh(S_0^{0,1}) + lh(U_3^{1,2})) + (1 + lh(S_1^{0,1}) + lh(U_3^{1,2})) \\ & = & 1 + 1 + (1 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1) \\ & = & 8 \end{array}$$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. $\underline{\epsilon} := E^{0,0}$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. $\underline{\epsilon} := E^{0,0}$
2. $\underline{\mathcal{S}_0^{0,1}(;x)} := S_0^{0,1}(;\underline{x})$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. $\underline{\epsilon} := E^{0,0}$
2. $\underline{\mathcal{S}_0^{0,1}(;x)} := S_0^{0,1}(;\underline{x})$
3. $\underline{\mathcal{S}_1^{0,1}(;x)} := S_1^{0,1}(;\underline{x})$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. $\underline{\epsilon} := E^{0,0}$
2. $\underline{\mathcal{S}_0^{0,1}(;x)} := S_0^{0,1}(;\underline{x})$
3. $\underline{\mathcal{S}_1^{0,1}(;x)} := S_1^{0,1}(;\underline{x})$

001

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. $\underline{\epsilon} := E^{0,0}$
2. $\underline{S_0^{0,1}(;x)} := S_0^{0,1}(;\underline{x})$
3. $\underline{S_1^{0,1}(;x)} := S_1^{0,1}(;\underline{x})$

001

$$\underline{S_1^{0,1}(;S_0^{0,1}(;\underline{S_0^{0,1}(;\underline{\epsilon})}))} := S_1^{0,1}(;\underline{S_0^{0,1}(;\underline{S_0^{0,1}(;\underline{\epsilon})})})$$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. $E^{k,l}(x_1, ..., x_k; y_1, ..., y_l) \rightarrow E^{0,0}, \forall k, l \in \mathbb{N} : k + l > 0$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. $E^{k,l}(x_1, ..., x_k; y_1, ..., y_l) \rightarrow E^{0,0}, \forall k, l \in \mathbb{N} : k + l > 0$
2. $U_r^{k,l}(x_1, ..., x_k; x_{k+1}, ..., x_{k+l}) \rightarrow x_r, 1 \leq r \leq k + l$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. $E^{k,l}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l) \rightarrow E^{0,0}, \forall k, l \in \mathbb{N} : k + l > 0$
2. $U_r^{k,l}(x_1, \ldots, x_k; x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}) \rightarrow x_r, \; 1 \leq r \leq k + l$
3. $P^{0,1}(; E^{0,0}) \rightarrow E^{0,0}$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. $E^{k,l}(x_1, ..., x_k; y_1, ..., y_l) \to E^{0,0}, \forall k, l \in \mathbb{N} : k + l > 0$
2. $U_r^{k,l}(x_1, ..., x_k; x_{k+1}, ..., x_{k+l}) \to x_r, \ 1 \leq r \leq k + l$
3. $P^{0,1}(; E^{0,0}) \to E^{0,0}$
4. $P^{0,1}(; xi) \to x, \ i \in \{0, 1\}$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. $E^{k,l}(x_1, ..., x_k; y_1, ..., y_l) \rightarrow E^{0,0}, \forall k, l \in \mathbb{N} : k + l > 0$
2. $U_r^{k,l}(x_1, ..., x_k; x_{k+1}, ..., x_{k+l}) \rightarrow x_r, 1 \leq r \leq k + l$
3. $P^{0,1}(; E^{0,0}) \rightarrow E^{0,0}$
4. $P^{0,1}(; xi) \rightarrow x, \ i \in \{0, 1\}$
5. $C^{0,4}(; E^{0,0}, y, z_0, z_1) \rightarrow y$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. $E^{k,l}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l) \to E^{0,0}, \ \forall k, l \in \mathbb{N} : k + l > 0$
2. $U_r^{k,l}(x_1, \ldots, x_k; x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}) \to x_r, \ 1 \leq r \leq k + l$
3. $P^{0,1}(; E^{0,0}) \to E^{0,0}$
4. $P^{0,1}(; xi) \to x, \ i \in \{0, 1\}$
5. $C^{0,4}(; E^{0,0}, y, z_0, z_1) \to y$
6. $C^{0,4}(; xi, y, z_0, z_1) \to z_i$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. $E^{k,l}(x_1, ..., x_k; y_1, ..., y_l) \to E^{0,0}, \; \forall k, l \in \mathbb{N} : k + l > 0$
2. $U_r^{k,l}(x_1, ..., x_k; x_{k+1}, ..., x_{k+l}) \to x_r, \; 1 \leq r \leq k + l$
3. $P^{0,1}(; E^{0,0}) \to E^{0,0}$
4. $P^{0,1}(; xi) \to x, \; i \in \{0, 1\}$
5. $C^{0,4}(; E^{0,0}, y, z_0, z_1) \to y$
6. $C^{0,4}(; xi, y, z_0, z_1) \to z_i$
7. $SUB_{k',l'}^{k,l}[f, g_1, ..., g_{k'}, h_1, ..., h_{l'}](x_1, ..., x_k; y_1, ..., y_l) \to$ $f(g_1(x_1, ..., x_k;), ..., g_{k'}(x_1, ..., x_k;); h_1(x_1, ..., x_k; y_1, ..., y_l), ..., h_{l'}(x_1, ..., x_k; y_1, ..., y_l))$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. $E^{k,l}(x_1, ..., x_k; y_1, ..., y_l) \to E^{0,0}, \forall k, l \in \mathbb{N} : k + l > 0$
2. $U_r^{k,l}(x_1, ..., x_k; x_{k+1}, ..., x_{k+l}) \to x_r, 1 \le r \le k + l$
3. $P^{0,1}(; E^{0,0}) \to E^{0,0}$
4. $P^{0,1}(; xi) \to x, \ i \in \{0, 1\}$
5. $C^{0,4}(; E^{0,0}, y, z_0, z_1) \to y$
6. $C^{0,4}(; xi, y, z_0, z_1) \to z_i$
7. $SUB^{k,l}_{k',l'}[f, g_1, ..., g_{k'}, h_1, ..., h_{l'}](x_1, ..., x_k; y_1, ..., y_l) \to f(g_1(x_1, ..., x_k;), ..., g_{k'}(x_1, ..., x_k;); h_1(x_1, ..., x_k; y_1, ..., y_l), ..., h_{l'}(x_1, ..., x_k; y_1, ..., y_l))$
8. $PREC^{k+1,l}[g, h_0, h_1](E^{0,0}, x_1, ..., x_k; y_1, ..., y_l) \to g(x_1, ..., x_k; y_1, ..., y_l)$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. $E^{k,l}(x_1, ..., x_k; y_1, ..., y_l) \to E^{0,0}, \forall k, l \in \mathbb{N} : k + l > 0$
2. $U_r^{k,l}(x_1, ..., x_k; x_{k+1}, ..., x_{k+l}) \to x_r, 1 \le r \le k + l$
3. $P^{0,1}(; E^{0,0}) \to E^{0,0}$
4. $P^{0,1}(; xi) \to x, \ i \in \{0, 1\}$
5. $C^{0,4}(; E^{0,0}, y, z_0, z_1) \to y$
6. $C^{0,4}(; xi, y, z_0, z_1) \to z_i$
7. $SUB_{k',l'}^{k,l}[f, g_1, ..., g_{k'}, h_1, ..., h_{l'}](x_1, ..., x_k; y_1, ..., y_l) \to$
   $f(g_1(x_1, ..., x_k;), ..., g_{k'}(x_1, ..., x_k;); h_1(x_1, ..., x_k; y_1, ..., y_l), ...,$
   $h_{l'}(x_1, ..., x_k; y_1, ..., y_l))$
8. $PREC^{k+1,l}[g, h_0, h_1](E^{0,0}, x_1, ..., x_k; y_1, ..., y_l) \to$
   $g(x_1, ..., x_k; y_1, ..., y_l)$
9. $PREC^{k+1,l}[g, h_0, h_1](S_i(; z), x_1, ..., x_k; y_1, ..., y_l) \to$
   $h_i(z, x_1, ..., x_k; y_1, ..., y_l, PREC[g, h_0, h_1](z, x_1, ..., x_k; y_1, ..., y_l)),$
   $i \in \{0, 1\}$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

$\mathcal{D}_{R_{\mathcal{B}},f} := \max\{n : \exists t_1, \ldots, t_n \text{ } ground \text{ } terms : t_1 \rightarrow_{R_B} \ldots \rightarrow_{R_B} t_n$
$\wedge \; t_1 = f(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}; \underline{n_1}, \ldots, \underline{n_l})\}$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

$\mathcal{D}_{R_{\mathcal{B}},f} := \max\{n : \exists t_1, ..., t_n \textit{ ground terms} : t_1 \rightarrow_{R_B} ... \rightarrow_{R_B} t_n$
$\wedge\ t_1 = f(\underline{m_1}, ..., \underline{m_k}; \underline{n_1}, ..., \underline{n_l})\}$

1. Para $f = E^{k,l}, U_r^{k,l}$ com $1 \leq r \leq k + l$, $S_i^{0,1}$, $P^{0,1}$, $C^{0,4}$, aonde $f \in B^{k,l}$, define-se $q_f(m_1, ..., m_k) = 1 + \sum_{i=1}^{k} m_i$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

$\mathcal{D}_{R_{\mathcal{B}},f} := \max\{n : \exists t_1, ..., t_n \textit{ ground terms} : t_1 \to_{R_B} \dots \to_{R_B} t_n$
$\wedge\ t_1 = f(\underline{m_1}, ..., \underline{m_k}; \underline{n_1}, ..., \underline{n_l})\}$

1. Para $f = E^{k,l}, U_r^{k,l}$ com $1 \leq r \leq k+l$, $S_i^{0,1}, P^{0,1}, C^{0,4}$, aonde $f \in B^{k,l}$, define-se $q_f(m_1, ..., m_k) = 1 + \sum_{i=1}^{k} m_i$
2. Para $f = SUB_{k',l'}^{k,l}[\tilde{f}, g_1, ..., g_{k'}, h_1, ..., h_{l'}]$ define-se $q_f(m_1, ..., m_k) =$
$q_{\tilde{f}}(q_{g_1}(m_1, ..., m_k), ..., q_{g_{k'}}(m_1, ..., m_k)) + \sum_{i=1}^{l'} q_{h_i}(m_1, ..., m_k)$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

$\mathcal{D}_{R_{\mathcal{B}},f} := \max\{n : \exists t_1, ..., t_n \text{ ground terms} : t_1 \to_{R_B} \dots \to_{R_B} t_n$
$\wedge\ t_1 = f(\underline{m_1}, ..., \underline{m_k}; \underline{n_1}, ..., \underline{n_l})\}$

1. Para $f = E^{k,l}, U_r^{k,l}$ com $1 \leq r \leq k + l$, $S_i^{0,1}$, $P^{0,1}$, $C^{0,4}$, aonde $f \in B^{k,l}$, define-se $q_f(m_1, ..., m_k) = 1 + \sum_{i=1}^{k} m_i$
2. Para $f = SUB_{k',l'}^{k,l}[\tilde{f}, g_1, ..., g_{k'}, h_1, ..., h_{l'}]$ define-se $q_f(m_1, ..., m_k) =$ $q_{\tilde{f}}(q_{g_1}(m_1, ..., m_k), ..., q_{g_{k'}}(m_1, ..., m_k)) + \sum_{i=1}^{l'} q_{h_i}(m_1, ..., m_k)$
3. Para $f = PREC^{k+1,l}[g, h_0, h_1]$, define-se $q_f(m, m_1, ..., m_k) =$ $m \times (q_{h_0}(m, m_1, ..., m_k) + q_{h_1}(m, m_1, ..., m_k)) + q_g(m_1, ..., m_k)$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

$\mathcal{D}_{R_{\mathcal{B}},f} := \max\{n : \exists t_1, \ldots, t_n \textit{ ground terms} : t_1 \to_{R_B} \ldots \to_{R_B} t_n \wedge t_1 = f(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}; \underline{n_1}, \ldots, \underline{n_l})\}$

1. Para $f = E^{k,l}, U_r^{k,l}$ com $1 \leq r \leq k+l$, $S_i^{0,1}, P^{0,1}, C^{0,4}$, aonde $f \in B^{k,l}$, define-se $q_f(m_1, \ldots, m_k) = 1 + \sum_{i=1}^{k} m_i$
2. Para $f = SUB_{k',l'}^{k,l}[\tilde{f}, g_1, \ldots, g_{k'}, h_1, \ldots, h_{l'}]$ define-se $q_f(m_1, \ldots, m_k) = q_{\tilde{f}}(q_{g_1}(m_1, \ldots, m_k), \ldots, q_{g_{k'}}(m_1, \ldots, m_k)) + \sum_{i=1}^{l'} q_{h_i}(m_1, \ldots, m_k)$
3. Para $f = PREC^{k+1,l}[g, h_0, h_1]$, define-se $q_f(m, m_1, \ldots, m_k) = m \times (q_{h_0}(m, m_1, \ldots, m_k) + q_{h_1}(m, m_1, \ldots, m_k)) + q_g(m_1, \ldots, m_k)$

Lema

Se $f \in B^{k,l}$, então $|\phi(f)(m_1, \ldots, m_k; n_1, \ldots, n_l)| \leq q_f(|m_1|, \ldots, |m_k|) + \max_{1 \leq i \leq l} |n_i|$, $\forall m_1, \ldots, m_k, n_1, \ldots, n_l \in \mathbb{N}$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

$$\mathrm{I}(f(s_1, \ldots, s_k; t_1, \ldots, t_l)) =$$

$$= 2^{\mathrm{I}_0(f)(|\phi(s_1)|, \ldots, |\phi(s_n)|)} \left(\sum_{i=1}^{k} \mathrm{I}(s_i) + \sum_{i=1}^{l} \mathrm{I}(t_i) + lh(f) \right)$$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. Para $f = E^{k,l}, U_r^{k,l}$ com $1 \leq r \leq k + l$, $S_i^{0,1}$, $P^{0,1}$, $C^{0,4}$, aonde $f \in B^{k,l}$, define-se $\mathrm{I}_0(f)(m_1, ..., m_k) = 0$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. Para $f = E^{k,l}, U_r^{k,l}$ com $1 \leq r \leq k + l$, $S_i^{0,1}$, $P^{0,1}$, $C^{0,4}$, aonde $f \in B^{k,l}$, define-se $\mathrm{I}_0(f)(m_1, ..., m_k) = 0$

2. $\mathrm{I}_0(SUB^{k,l}_{k',l'}[f, g_1, ..., g_{k'}, h_1, ..., h_{l'}])(m_1, ..., m_k) =$
$\mathrm{I}_0(f)(q_{g_1}(m_1, ..., m_k), ..., q_{g_{k'}}(m_1, ..., m_k)) +$
$\sum_{i=1}^{k'} \mathrm{I}_0(g_i)(m_1, ..., m_k) + \sum_{i=1}^{l'} \mathrm{I}_0(h_i)(m_1, ..., m_k) + 1$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. Para $f = E^{k,l}, U_r^{k,l}$ com $1 \leq r \leq k+l$, $S_i^{0,1}, P^{0,1}, C^{0,4}$, aonde $f \in B^{k,l}$, define-se $\mathrm{I}_0(f)(m_1, ..., m_k) = 0$
2. $\mathrm{I}_0(SUB^{k,l}_{k',l'}[f, g_1, ..., g_{k'}, h_1, ..., h_{l'}])(m_1, ..., m_k) = \mathrm{I}_0(f)(q_{g_1}(m_1, ..., m_k), ..., q_{g_{k'}}(m_1, ..., m_k)) + \sum_{i=1}^{k'} \mathrm{I}_0(g_i)(m_1, ..., m_k) + \sum_{i=1}^{l'} \mathrm{I}_0(h_i)(m_1, ..., m_k) + 1$
3. $\mathrm{I}_0(PREC^{k+1,l}[g, h_0, h_1])(m_1, ..., m_k) = m \times (\mathrm{I}_0(h_0)(m, m_1, ..., m_k) + \mathrm{I}_0(h_1)(m, m_1, ..., m_k)) + \mathrm{I}_0(g)(m_1, ..., m_k)$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

Lema

Se $s, t \in \mathcal{G}(B)$ e $s \rightarrow_{R_B} t$, então $\mathrm{I}(s) > \mathrm{I}(t)$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

Lema

Se $s, t \in \mathcal{G}(B)$ e $s \rightarrow_{R_B} t$, então $\mathrm{I}(s) > \mathrm{I}(t)$

Como $t_1 \rightarrow_{R_B} \ldots \rightarrow_{R_B} t_n$ implica que $n \leq \mathrm{I}(t_1)$, então $\mathcal{D}_{R_{\mathcal{C}},f} \leq I(f(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}; \underline{n_1}, \ldots, \underline{n_l}))$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

Lema

Se $s, t \in \mathcal{G}(B)$ e $s \rightarrow_{R_B} t$, então $\mathrm{I}(s) > \mathrm{I}(t)$

Como $t_1 \rightarrow_{R_B} \dots \rightarrow_{R_B} t_n$ implica que $n \leq \mathrm{I}(t_1)$, então $\mathcal{D}_{R_{\mathcal{C}},f} \leq I(f(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}; \underline{n_1}, \dots, \underline{n_l}))$

Prova-se o lema provando que $I(s\sigma) > I(t\sigma)$ para cada $s \rightarrow_{R_B} t$ e para cada substituição *ground*.

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

Lema

Se $s, t \in \mathcal{G}(B)$ e $s \rightarrow_{R_B} t$, então $\mathrm{I}(s) > \mathrm{I}(t)$

Como $t_1 \rightarrow_{R_B} \dots \rightarrow_{R_B} t_n$ implica que $n \leq \mathrm{I}(t_1)$, então $\mathcal{D}_{R_{\mathcal{C}},f} \leq I(f(\underline{m_1}, \dots, \underline{m_k}; \underline{n_1}, \dots, \underline{n_l}))$

Prova-se o lema provando que $I(s\sigma) > I(t\sigma)$ para cada $s \rightarrow_{R_B} t$ e para cada substituição *ground*.

$\mathcal{D}_{R_{\mathcal{B}},f}(m) \geq 2^{|m|}$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. $E^{k,l}(x_1, ..., x_k; y_1, ..., y_l) \to E^{0,0}, \forall k, l \in \mathbb{N} : k + l > 0$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. $E^{k,l}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l) \to E^{0,0}, \forall k, l \in \mathbb{N} : k + l > 0$
2. $U_r^{k,l}(x_1, \ldots, x_k; x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}) \to x_r, \ 1 \leq r \leq k + l$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. $E^{k,l}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l) \rightarrow E^{0,0}, \; \forall k, l \in \mathbb{N} : k + l > 0$
2. $U_r^{k,l}(x_1, \ldots, x_k; x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}) \rightarrow x_r, \; 1 \leq r \leq k + l$
3. $P^{0,1}(; E^{0,0}) \rightarrow E^{0,0}$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. $E^{k,l}(x_1, \ldots, x_k; y_1, \ldots, y_l) \rightarrow E^{0,0}, \ \forall k, l \in \mathbb{N} : k + l > 0$
2. $U_r^{k,l}(x_1, \ldots, x_k; x_{k+1}, \ldots, x_{k+l}) \rightarrow x_r, \ 1 \leq r \leq k + l$
3. $P^{0,1}(; E^{0,0}) \rightarrow E^{0,0}$
4. $P^{0,1}(; xi) \rightarrow x, \ i \in \{0, 1\}$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. $E^{k,l}(x_1, ..., x_k; y_1, ..., y_l) \to E^{0,0}, \forall k, l \in \mathbb{N} : k + l > 0$
2. $U_r^{k,l}(x_1, ..., x_k; x_{k+1}, ..., x_{k+l}) \to x_r, \; 1 \leq r \leq k + l$
3. $P^{0,1}(; E^{0,0}) \to E^{0,0}$
4. $P^{0,1}(; xi) \to x, \; i \in \{0, 1\}$
5. $C^{0,4}(; E^{0,0}, y, z_0, z_1) \to y$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. $E^{k,l}(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_l) \rightarrow E^{0,0}, \ \forall k, l \in \mathbb{N} : k + l > 0$
2. $U_r^{k,l}(x_1, \dots, x_k; x_{k+1}, \dots, x_{k+l}) \rightarrow x_r, \ 1 \leq r \leq k + l$
3. $P^{0,1}(; E^{0,0}) \rightarrow E^{0,0}$
4. $P^{0,1}(; xi) \rightarrow x, \ i \in \{0, 1\}$
5. $C^{0,4}(; E^{0,0}, y, z_0, z_1) \rightarrow y$
6. $C^{0,4}(; xi, y, z_0, z_1) \rightarrow z_i$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. $E^{k,l}(x_1, ..., x_k; y_1, ..., y_l) \rightarrow E^{0,0}, \forall k, l \in \mathbb{N} : k + l > 0$
2. $U_r^{k,l}(x_1, ..., x_k; x_{k+1}, ..., x_{k+l}) \rightarrow x_r, \ 1 \leq r \leq k + l$
3. $P^{0,1}(; E^{0,0}) \rightarrow E^{0,0}$
4. $P^{0,1}(; xi) \rightarrow x, \ i \in \{0, 1\}$
5. $C^{0,4}(; E^{0,0}, y, z_0, z_1) \rightarrow y$
6. $C^{0,4}(; xi, y, z_0, z_1) \rightarrow z_i$
7. $SUB_{k',l'}^{k,l}[f, g_1, ..., g_{k'}, h_1, ..., h_{l'}](x_1, ..., x_k; \underline{n_1}, ..., \underline{n_l}) \rightarrow$
   $f(g_1(x_1, ..., x_k;), ..., g_{k'}(x_1, ..., x_k;); h_1(x_1, ..., x_k; \underline{n_1}, ..., \underline{n_l}), ...,$
   $h_{l'}(x_1, ..., x_k; \underline{n_1}, ..., \underline{n_l}))$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. $E^{k,l}(x_1, \dots, x_k; y_1, \dots, y_l) \rightarrow E^{0,0}, \ \forall k, l \in \mathbb{N} : k + l > 0$
2. $U_r^{k,l}(x_1, \dots, x_k; x_{k+1}, \dots, x_{k+l}) \rightarrow x_r, \ 1 \leq r \leq k + l$
3. $P^{0,1}(; E^{0,0}) \rightarrow E^{0,0}$
4. $P^{0,1}(; xi) \rightarrow x, \ i \in \{0, 1\}$
5. $C^{0,4}(; E^{0,0}, y, z_0, z_1) \rightarrow y$
6. $C^{0,4}(; xi, y, z_0, z_1) \rightarrow z_i$
7. $SUB_{k',l'}^{k,l}[f, g_1, \dots, g_{k'}, h_1, \dots, h_{l'}](x_1, \dots, x_k; \underline{n_1}, \dots, \underline{n_l}) \rightarrow$
   $f(g_1(x_1, \dots, x_k;), \dots, g_{k'}(x_1, \dots, x_k;); h_1(x_1, \dots, x_k; \underline{n_1}, \dots, \underline{n_l}), \dots,$
   $h_{l'}(x_1, \dots, x_k; \underline{n_1}, \dots, \underline{n_l}))$
8. $PREC^{k+1,l}[g, h_0, h_1](E^{0,0}, x_1, \dots, x_k; \underline{n_1}, \dots, \underline{n_l}) \rightarrow$
   $g(x_1, \dots, x_k; \underline{n_1}, \dots, \underline{n_l})$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. $E^{k,l}(x_1, ..., x_k; y_1, ..., y_l) \to E^{0,0}, \ \forall k, l \in \mathbb{N} : k + l > 0$
2. $U_r^{k,l}(x_1, ..., x_k; x_{k+1}, ..., x_{k+l}) \to x_r, \ 1 \leq r \leq k + l$
3. $P^{0,1}(; E^{0,0}) \to E^{0,0}$
4. $P^{0,1}(; xi) \to x, \ i \in \{0, 1\}$
5. $C^{0,4}(; E^{0,0}, y, z_0, z_1) \to y$
6. $C^{0,4}(; xi, y, z_0, z_1) \to z_i$
7. $SUB^{k,l}_{k',l'}[f, g_1, ..., g_{k'}, h_1, ..., h_{l'}](x_1, ..., x_k; \underline{n_1}, ..., \underline{n_l}) \to$
   $f(g_1(x_1, ..., x_k;), ..., g_{k'}(x_1, ..., x_k;); h_1(x_1, ..., x_k; \underline{n_1}, ..., \underline{n_l}), ...,$
   $h_{l'}(x_1, ..., x_k; \underline{n_1}, ..., \underline{n_l}))$
8. $PREC^{k+1,l}[g, h_0, h_1](E^{0,0}, x_1, ..., x_k; \underline{n_1}, ..., \underline{n_l}) \to$
   $g(x_1, ..., x_k; \underline{n_1}, ..., \underline{n_l})$
9. $PREC^{k+1,l}[g, h_0, h_1](S_i(; z), x_1, ..., x_k; \underline{n_1}, ..., \underline{n_l}) \to$
   $h_i(z, x_1, ..., x_k; \underline{n_1}, ..., \underline{n_l}, PREC[g, h_0, h_1](z, x_1, ..., x_k; \underline{n_1}, ..., \underline{n_l})),$
   $i \in \{0, 1\}$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

$\mathcal{D}_{R'_{\mathcal{B}},f} := \max\{n : \exists t_1, ..., t_n \textit{ ground terms} : t_1 \rightarrow_{R'_B} ... \rightarrow_{R'_B} t_n \wedge t_1 = f(\underline{m_1}, ..., \underline{m_k}; \underline{n_1}, ..., \underline{n_l})\}$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

$\mathcal{D}_{R'_{\mathcal{B}},f} := \max\{n : \exists t_1, \ldots, t_n \textit{ ground terms} : t_1 \rightarrow_{R'_B} \ldots \rightarrow_{R'_B} t_n$
$\wedge\ t_1 = f(\underline{m_1}, \ldots, \underline{m_k}; \underline{n_1}, \ldots, \underline{n_l})\}$

$$\mathrm{J}(f(s_1, \ldots, s_k; t_1, \ldots, t_l)) =$$

$$= \mathrm{J}_0(f)(|\phi(s_1)|, \ldots, |\phi(s_n)|)\times$$

$$\times \left(\sum_{i=1}^{k} \mathrm{J}(s_i) + \max_{1 \leq i \leq l} |\phi(t_i)| + 1 \right) + \sum_{i=1}^{l} \mathrm{J}(t_i) + lh(f)$$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. Para $f = E^{0,0}, S_i^{0,1}, P^{0,1}, C^{0,4}$, define-se $\mathrm{J}_0(f) = 0$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. Para $f = E^{0,0}, S_i^{0,1}, P^{0,1}, C^{0,4}$, define-se $\mathrm{J}_0(f) = 0$
2. Para $f = E^{k,l}, U_r^{k,l}$ com $1 \leq r \leq k + l$ define-se $\mathrm{J}_0(f)(m_1, ..., m_k) = 1$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. Para $f = E^{0,0}, S_i^{0,1}, P^{0,1}, C^{0,4}$, define-se $\mathrm{J}_0(f) = 0$
2. Para $f = E^{k,l}, U_r^{k,l}$ com $1 \leq r \leq k + l$ define-se $\mathrm{J}_0(f)(m_1, ..., m_k) = 1$
3. $\mathrm{J}_0(SUB^{k,l}_{k',l'}[f, g_1, ..., g_{k'}, h_1, ..., h_{l'}])(m_1, ..., m_k) = \mathrm{J}_0(f)(q_{g_1}(m_1, ..., m_k), ..., q_{g_{k'}}(m_1, ..., m_k)) \times \times (\sum_{i=1}^{k'} [\mathrm{J}_0(g_i)(m_1, ..., m_k) + lh(g_i)] + \sum_{i=1}^{l'} q_{h_i}(m_1, ..., m_k) + 1) + \sum_{i=1}^{l'} \mathrm{J}_0(h_i)(m_1, ..., m_k) + l \times l'$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

1. Para $f = E^{0,0}, S_i^{0,1}, P^{0,1}, C^{0,4}$, define-se $\mathrm{J}_0(f) = 0$
2. Para $f = E^{k,l}, U_r^{k,l}$ com $1 \leq r \leq k+l$ define-se $\mathrm{J}_0(f)(m_1, \ldots, m_k) = 1$
3. $\mathrm{J}_0(SUB^{k,l}_{k',l'}[f, g_1, \ldots, g_{k'}, h_1, \ldots, h_{l'}])(m_1, \ldots, m_k) = \mathrm{J}_0(f)(q_{g_1}(m_1, \ldots, m_k), \ldots, q_{g_{k'}}(m_1, \ldots, m_k)) \times \times (\sum_{i=1}^{k'} [\mathrm{J}_0(g_i)(m_1, \ldots, m_k) + lh(g_i)] + \sum_{i=1}^{l'} q_{h_i}(m_1, \ldots, m_k) + 1) + \sum_{i=1}^{l'} \mathrm{J}_0(h_i)(m_1, \ldots, m_k) + l \times l'$
4. $\mathrm{J}_0(PREC^{k+1,l}[g, h_0, h_1])(m_1, \ldots, m_k) = m \times ([\mathrm{J}_0(h_0)(m, m_1, \ldots, m_k) + \mathrm{J}_0(h_1)(m, m_1, \ldots, m_k)] \times q_f(m, m_1, \ldots, m_k) + l + \max\{lh(h_0), lh(h_1)\}) + \mathrm{J}_0(g)(m_1, \ldots, m_k)$

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

Caracterização de PTIME via Regras de Reescrita

Lema

Se $s, t \in \mathcal{G}(B)$ e $s \rightarrow_{R'_B} t$, então $\mathrm{J}(s) > \mathrm{J}(t)$

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

1. **(Sequência Vazia)** $\mathcal{E}^{k,l}(\bar{x}, \bar{y}) = \epsilon$

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

1. **(Sequência Vazia)** $\mathcal{E}^{k,l}(\bar{x}, \bar{y}) = \epsilon$
2. **(Projeções)** $\mathcal{U}_r^{k,l}(x_1, ..., x_k; x_{k+1}, ..., x_{n+l}) = x_r,\ 1 \leq r \leq k + l$

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

1. **(Sequência Vazia)** $\mathcal{E}^{k,l}(\bar{x}, \bar{y}) = \epsilon$
2. **(Projeções)** $\mathcal{U}_r^{k,l}(x_1, ..., x_k; x_{k+1}, ..., x_{n+l}) = x_r,\ 1 \leq r \leq k + l$
3. **(Sucessores)** $\mathcal{S}_i^{0,1}(; x) = xi,\ i = 0, 1$

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

1. **(Sequência Vazia)** $\mathcal{E}^{k,l}(\bar{x}, \bar{y}) = \epsilon$
2. **(Projeções)** $\mathcal{U}_r^{k,l}(x_1, \ldots, x_k; x_{k+1}, \ldots, x_{n+l}) = x_r$, $1 \leq r \leq k + l$
3. **(Sucessores)** $\mathcal{S}_i^{0,1}(; x) = xi$, $i = 0, 1$
4. **(Condicional)** $\mathcal{C}^{0;4}(; \epsilon, y, z_0, z_1) = y$, $\mathcal{C}^{0;4}(; xi, y, z_0, z_1) = z_i$, $i = 0, 1$

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

1. **(Sequência Vazia)** $\mathcal{E}^{k,l}(\bar{x}, \bar{y}) = \epsilon$
2. **(Projeções)** $\mathcal{U}_r^{k,l}(x_1, ..., x_k; x_{k+1}, ..., x_{n+l}) = x_r$, $1 \leq r \leq k + l$
3. **(Sucessores)** $\mathcal{S}_i^{0,1}(; x) = xi$, $i = 0, 1$
4. **(Condicional)** $\mathcal{C}^{0;4}(; \epsilon, y, z_0, z_1) = y$, $\mathcal{C}^{0;4}(; xi, y, z_0, z_1) = z_i$, $i = 0, 1$
5. **(Predecessor)** $\mathcal{P}(; \epsilon) = \epsilon$, $\mathcal{P}(; xi) = x$, $i = 0, 1$

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

1. **(Sequência Vazia)** $\mathcal{E}^{k,l}(\bar{x},\bar{y}) = \epsilon$
2. **(Projeções)** $\mathcal{U}_r^{k,l}(x_1,\ldots,x_k;x_{k+1},\ldots,x_{n+l}) = x_r,\ 1 \leq r \leq k+l$
3. **(Sucessores)** $\mathcal{S}_i^{0,1}(;x) = xi,\ i = 0,1$
4. **(Condicional)** $\mathcal{C}^{0;4}(;\epsilon,y,z_0,z_1) = y,\ \mathcal{C}^{0;4}(;xi,y,z_0,z_1) = z_i,\ i = 0,1$
5. **(Predecessor)** $\mathcal{P}(;\epsilon) = \epsilon,\ \mathcal{P}(;xi) = x,\ i = 0,1$
6. **(Composições)** $\mathcal{SUB}_{k',l'}^{k,l}[\mathcal{F},\mathcal{G}_1,\ldots,\mathcal{G}_{k'},\mathcal{H}_1,\ldots,\mathcal{H}_{l'}](\bar{x};\bar{y}) = \mathcal{F}(\mathcal{G}_1(\bar{x};),\ldots,\mathcal{G}_{k'}(\bar{x};);\mathcal{H}_1(\bar{x};\bar{y}),\ldots,\mathcal{H}_{l'}(\bar{x};\bar{y}))$

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

1. **(Sequência Vazia)** $\mathcal{E}^{k,l}(\bar{x}, \bar{y}) = \epsilon$
2. **(Projeções)** $\mathcal{U}_r^{k,l}(x_1, ..., x_k; x_{k+1}, ..., x_{n+l}) = x_r,\ 1 \leq r \leq k + l$
3. **(Sucessores)** $\mathcal{S}_i^{0,1}(; x) = xi,\ i = 0, 1$
4. **(Condicional)** $\mathcal{C}^{0;4}(; \epsilon, y, z_0, z_1) = y,\ \mathcal{C}^{0;4}(; xi, y, z_0, z_1) = z_i,$ $i = 0, 1$
5. **(Predecessor)** $\mathcal{P}(; \epsilon) = \epsilon,\ \mathcal{P}(; xi) = x,\ i = 0, 1$
6. **(Composições)** $\mathcal{SUB}_{k',l'}^{k,l}[\mathcal{F}, \mathcal{G}_1, ..., \mathcal{G}_{k'}, \mathcal{H}_1, ..., \mathcal{H}_{l'}](\bar{x}; \bar{y}) =$ $\mathcal{F}(\mathcal{G}_1(\bar{x};), ..., \mathcal{G}_{k'}(\bar{x};); \mathcal{H}_1(\bar{x}; \bar{y}), ..., \mathcal{H}_{l'}(\bar{x}; \bar{y}))$
7. **(Recursões em Árvore)**
   $\mathcal{TREC}^{k+2,l}[\mathcal{G}, \mathcal{H}](p, \epsilon, \bar{x}; \bar{y}) = \mathcal{G}(p, \epsilon, \bar{x}; \bar{y}),$
   $\mathcal{TREC}^{k+2,l}[\mathcal{G}, \mathcal{H}](p, zi, \bar{x}; \bar{y}) =$
   $\mathcal{H}(p, zi, \bar{x}; \bar{y}, \mathcal{TREC}^{k+2,l}[\mathcal{G}, \mathcal{H}](p0, z, \bar{x}; \bar{y}),$
   $\mathcal{TREC}^{k+2,l}[\mathcal{G}, \mathcal{H}](p1, z, \bar{x}; \bar{y})),\ i = 0, 1$

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

7. **(Recursões em Árvore)**
$\mathcal{T}REC^{k+2,l}[\mathcal{G},\mathcal{H}](p,\epsilon,\bar{x};\bar{y}) = \mathcal{G}(p,\epsilon,\bar{x};\bar{y})$,
$\mathcal{T}REC^{k+2,l}[\mathcal{G},\mathcal{H}](p,zi,\bar{x};\bar{y}) =$
$\mathcal{H}(p,zi,\bar{x};\bar{y},\mathcal{T}REC^{k+2,l}[\mathcal{G},\mathcal{H}](p0,z,\bar{x};\bar{y}),$
$\mathcal{T}REC^{k+2,l}[\mathcal{G},\mathcal{H}](p1,z,\bar{x};\bar{y})),\ i = 0,1$

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

7. **(Recursões em Árvore)**
   $\mathcal{T}REC^{k+2,l}[\mathcal{G},\mathcal{H}](p,\epsilon,\bar{x};\bar{y}) = \mathcal{G}(p,\epsilon,\bar{x};\bar{y})$,
   $\mathcal{T}REC^{k+2,l}[\mathcal{G},\mathcal{H}](p,zi,\bar{x};\bar{y}) =$
   $\mathcal{H}(p,zi,\bar{x};\bar{y},\mathcal{T}REC^{k+2,l}[\mathcal{G},\mathcal{H}](p0,z,\bar{x};\bar{y}),$
   $\mathcal{T}REC^{k+2,l}[\mathcal{G},\mathcal{H}](p1,z,\bar{x};\bar{y}))$, $i = 0, 1$

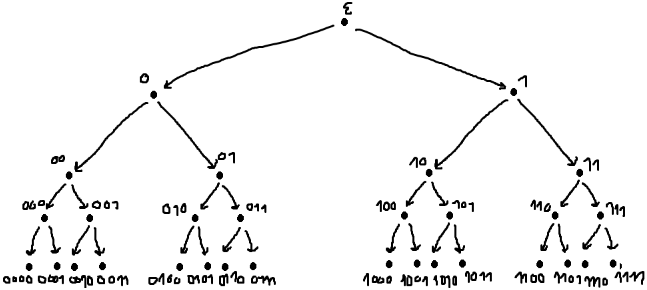
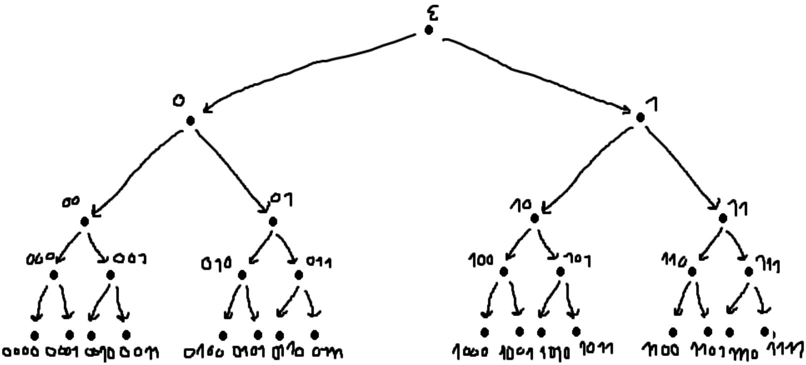


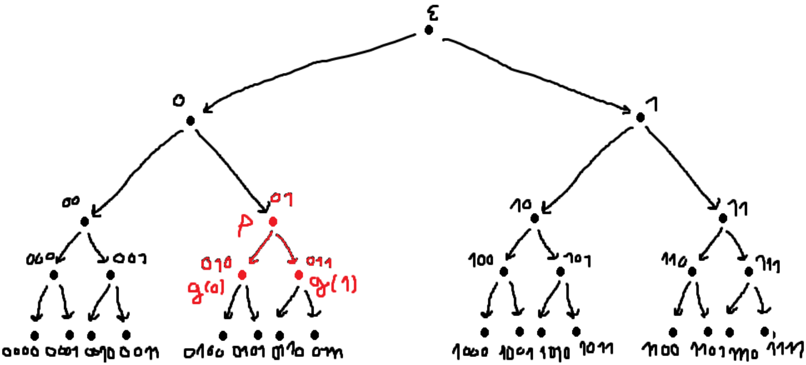
Figure: Ilustração da Recursão em Árvore

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita



Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita



Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

$\mathcal{P}\mathrm{SPACE} \subseteq \{\mathcal{F} : (\{0,1\}^*)^{n;m} \longrightarrow \{0,1\}^* \mid n, m \in \mathbb{N},\ n + m \geq 1\}$
é o menor conjunto das funções definidas a partir das funções iniciais

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

$\mathcal{P}\mathrm{SPACE} \subseteq \{\mathcal{F} : (\{0,1\}^*)^{n;m} \longrightarrow \{0,1\}^* \mid n, m \in \mathbb{N},\ n + m \geq 1\}$ é o menor conjunto das funções definidas a partir das funções iniciais

1. **(Sequência Vazia)** $\mathcal{E}^{n,m}$, $n, m \in \mathbb{N}$;

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

$\mathcal{P}\mathrm{SPACE} \subseteq \{\mathcal{F} : (\{0,1\}^*)^{n;m} \longrightarrow \{0,1\}^* \mid n, m \in \mathbb{N},\ \ n+m \geq 1\}$
é o menor conjunto das funções definidas a partir das funções iniciais

1. **(Sequência Vazia)** $\mathcal{E}^{n,m}$, $n, m \in \mathbb{N}$;
2. **(Projeções)** $\mathcal{U}_j^{n,m}$, $\forall n, m, j \in \mathbb{N}$ tais que $1 \leq j \leq n+m$;

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

$\mathcal{P}\mathrm{SPACE} \subseteq \{\mathcal{F} : (\{0,1\}^*)^{n;m} \longrightarrow \{0,1\}^* \mid n, m \in \mathbb{N},\ n+m \geq 1\}$ é o menor conjunto das funções definidas a partir das funções iniciais

1. **(Sequência Vazia)** $\mathcal{E}^{n,m}$, $n, m \in \mathbb{N}$;
2. **(Projeções)** $\mathcal{U}_j^{n,m}$, $\forall n, m, j \in \mathbb{N}$ tais que $1 \leq j \leq n+m$;
3. **(Sucessores)** $\mathcal{S}_i$, $\forall i \in \{0,1\}$;

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

$\mathcal{P}\mathrm{SPACE} \subseteq \{\mathcal{F} : (\{0,1\}^*)^{n;m} \longrightarrow \{0,1\}^* \mid n, m \in \mathbb{N},\ n+m \geq 1\}$ é o menor conjunto das funções definidas a partir das funções iniciais

1. **(Sequência Vazia)** $\mathcal{E}^{n,m}$, $n, m \in \mathbb{N}$;
2. **(Projeções)** $\mathcal{U}_j^{n,m}$, $\forall n, m, j \in \mathbb{N}$ tais que $1 \leq j \leq n+m$;
3. **(Sucessores)** $\mathcal{S}_i$, $\forall i \in \{0,1\}$;
4. **(Condicional)** $\mathcal{C}$;

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

$\mathcal{P}\mathrm{SPACE} \subseteq \{\mathcal{F} : (\{0,1\}^*)^{n;m} \longrightarrow \{0,1\}^* \mid n, m \in \mathbb{N},\ n+m \geq 1\}$ é o menor conjunto das funções definidas a partir das funções iniciais

1. **(Sequência Vazia)** $\mathcal{E}^{n,m}$, $n, m \in \mathbb{N}$;
2. **(Projeções)** $\mathcal{U}_j^{n,m}$, $\forall n, m, j \in \mathbb{N}$ tais que $1 \leq j \leq n+m$;
3. **(Sucessores)** $\mathcal{S}_i$, $\forall i \in \{0,1\}$;
4. **(Condicional)** $\mathcal{C}$;
5. **(Predecessores)** $\mathcal{P}$;

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

$\mathcal{P}\mathrm{SPACE} \subseteq \{\mathcal{F} : (\{0,1\}^*)^{n;m} \longrightarrow \{0,1\}^* \mid n, m \in \mathbb{N},\ n+m \geq 1\}$
é o menor conjunto das funções definidas a partir das funções iniciais

1. (**Sequência Vazia**) $\mathcal{E}^{n,m}$, $n, m \in \mathbb{N}$;
2. (**Projeções**) $\mathcal{U}_j^{n,m}$, $\forall n, m, j \in \mathbb{N}$ tais que $1 \leq j \leq n+m$;
3. (**Sucessores**) $\mathcal{S}_i$, $\forall i \in \{0,1\}$;
4. (**Condicional**) $\mathcal{C}$;
5. (**Predecessores**) $\mathcal{P}$;

e fechada para os seguintes esquemas

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

$\mathcal{P}\text{SPACE} \subseteq \{\mathcal{F} : (\{0,1\}^*)^{n;m} \longrightarrow \{0,1\}^* \mid n, m \in \mathbb{N},\ n+m \geq 1\}$ é o menor conjunto das funções definidas a partir das funções iniciais

1. **(Sequência Vazia)** $\mathcal{E}^{n,m}$, $n, m \in \mathbb{N}$;
2. **(Projeções)** $\mathcal{U}_j^{n,m}$, $\forall n, m, j \in \mathbb{N}$ tais que $1 \leq j \leq n+m$;
3. **(Sucessores)** $\mathcal{S}_i$, $\forall i \in \{0,1\}$;
4. **(Condicional)** $\mathcal{C}$;
5. **(Predecessores)** $\mathcal{P}$;

e fechada para os seguintes esquemas

6. **(Substituição)** $\mathcal{SUB}_{n',m'}^{n,m}[\mathcal{F}, \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_{n'}, \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_{m'}]$, com $n, m, n', m' \in \mathbb{N}$, com $\mathcal{F}$ função de aridade $n' + m'$ e $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_{n'}$ e $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_{m'}$ funções de aridades $n+0$ e $n+m$, respetivamente;

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

$\mathcal{P}\mathrm{SPACE} \subseteq \{\mathcal{F} : (\{0,1\}^*)^{n;m} \longrightarrow \{0,1\}^* \mid n, m \in \mathbb{N},\ n+m \geq 1\}$ é o menor conjunto das funções definidas a partir das funções iniciais

1. (**Sequência Vazia**) $\mathcal{E}^{n,m}$, $n, m \in \mathbb{N}$;
2. (**Projeções**) $\mathcal{U}_j^{n,m}$, $\forall n, m, j \in \mathbb{N}$ tais que $1 \leq j \leq n+m$;
3. (**Sucessores**) $\mathcal{S}_i$, $\forall i \in \{0,1\}$;
4. (**Condicional**) $\mathcal{C}$;
5. (**Predecessores**) $\mathcal{P}$;

e fechada para os seguintes esquemas

6. (**Substituição**) $\mathcal{SUB}_{n',m'}^{n,m}[\mathcal{F}, \mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_{n'}, \mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_{m'}]$, com $n, m, n', m' \in \mathbb{N}$, com $\mathcal{F}$ função de aridade $n'+m'$ e $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_{n'}$ e $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_{m'}$ funções de aridades $n+0$ e $n+m$, respetivamente;
7. (**Recursão em Árvore**) $\mathcal{TREC}^{n+2,m}[\mathcal{G}, \mathcal{H}]$, com $\mathcal{G}$ e $\mathcal{H}$ funções de aridades $(n+2)+m$ e $(n+2)+(m+2)$, respetivamente.

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

PSPACE é o menor conjunto dos símbolos de funções definidas a partir dos símbolos de funções iniciais

1. (**Sequência Vazia**) $E^{n,m}$, $n, m \in \mathbb{N}$;
2. (**Projeções**) $U_j^{n,m}$, $\forall n, m, j \in \mathbb{N}$ tais que $1 \leq j \leq n + m$;
3. (**Sucessores**) S_i, $\forall i \in \{0, 1\}$;
4. (**Condicional**) C;
5. (**Predecessores**) P;

e fechada para os seguintes esquemas

6. (**Substituição**) $SUB^{n,m}_{n',m'}[f, g_1, ..., g_{n'}, h_1, ..., h_{m'}]$, com $n, m, n', m' \in \mathbb{N}$, com F função de aridade $n' + m'$ e $g_1, ..., g_{n'}$ e $h_1, ..., h_{m'}$ funções de aridades $n + 0$ e $n + m$, respetivamente;
7. (**Recursão em Árvore**) $TREC^{n+2;m}[g, h]$, com g e h funções de aridades $(n + 2) + m$ e $(n + 2) + (m + 2)$, respetivamente.

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

$$TREE^{n+2,m+2}[g, h]$$

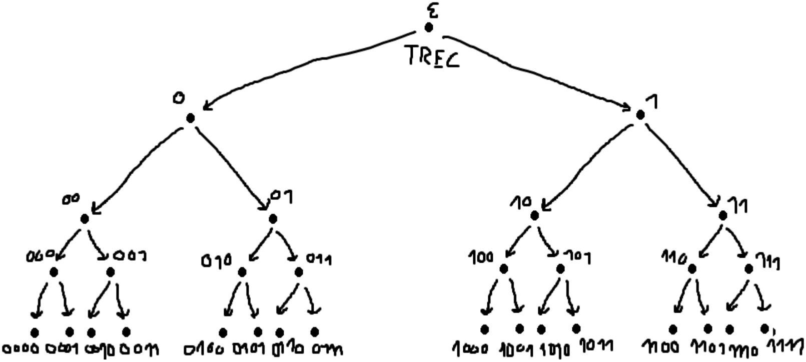
Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

$$TREE^{n+2,m+2}[g, h]$$

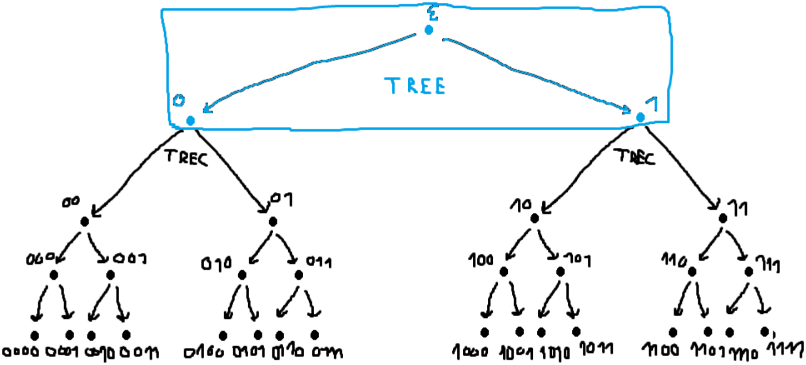
$\mathrm{PSPACE}^{+} = \mathrm{PSPACE} \cup \{\, TREE^{n+2,m+2}[g, h] : n, m \in \mathbb{N} \wedge g \in \mathrm{PSPACE}^{n+2,m} \wedge h \in \mathrm{PSPACE}^{n+2,m+2} \}$

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

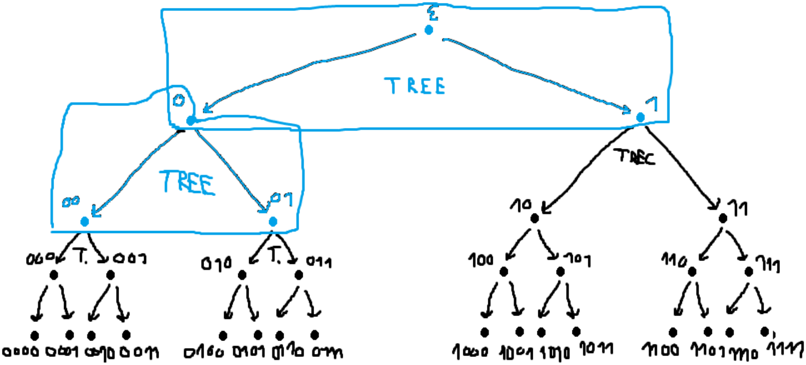
Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita



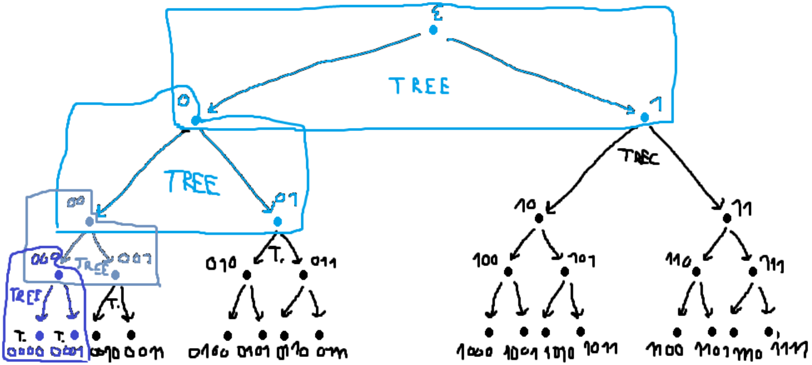
Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita



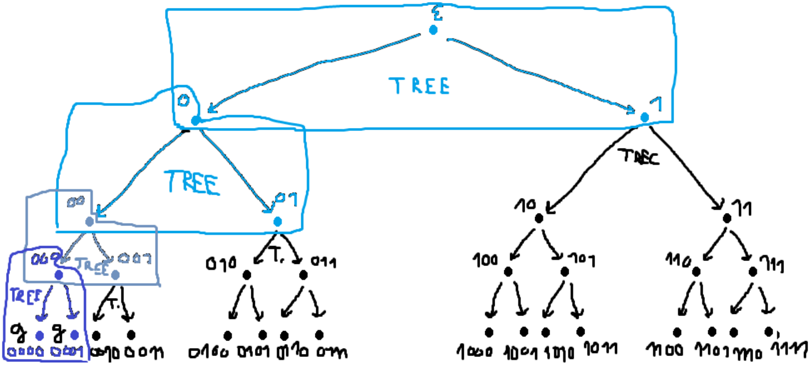
Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita



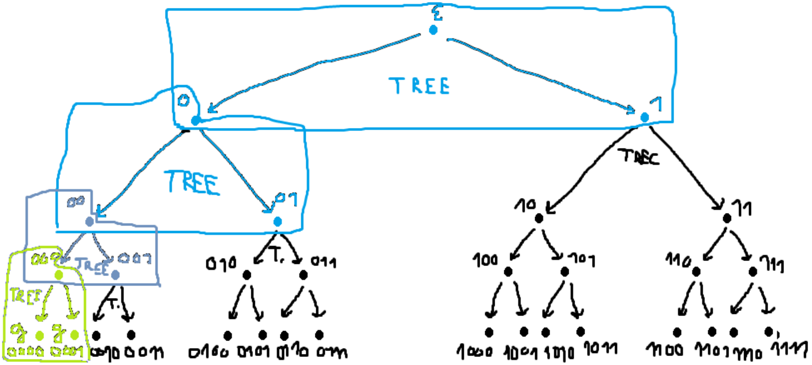
Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita



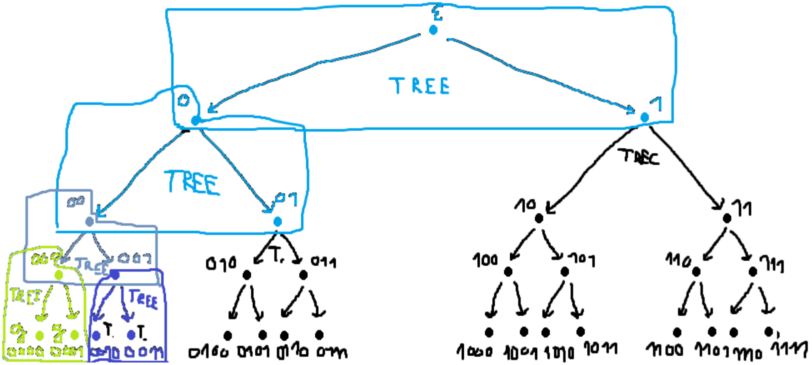
Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita



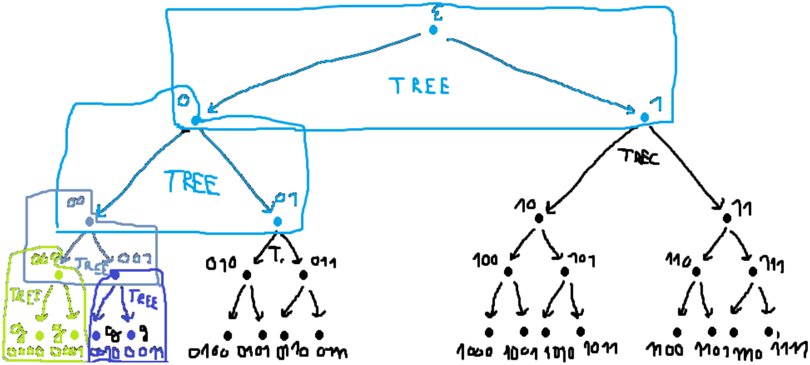
Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita



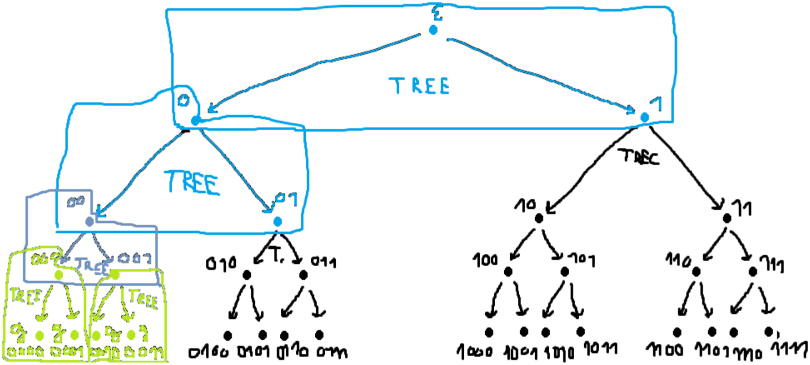
Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita



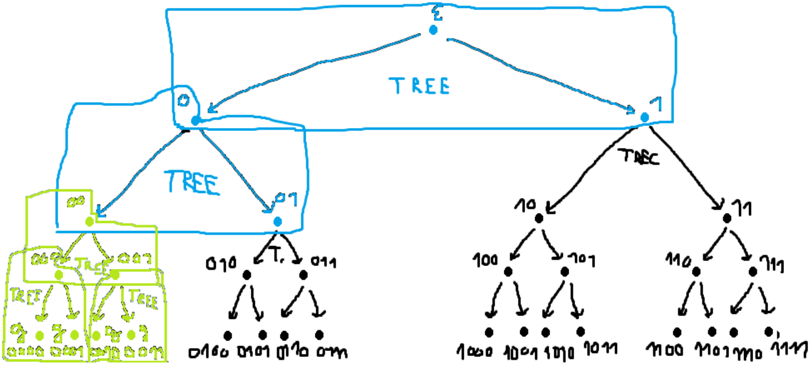
Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita



Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita



Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita



Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

Define-se a função comprimento de um símbolo de função, $lh : \mathrm{PSPACE} \longrightarrow \mathbb{N}^+$, indutivamente, da seguinte forma:

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

Define-se a função comprimento de um símbolo de função, $lh : \mathrm{PSPACE} \longrightarrow \mathbb{N}^+$, indutivamente, da seguinte forma:

1. $lh(E^{n,m}) := 1, \forall n, m \in \mathbb{N}$;

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

Define-se a função comprimento de um símbolo de função, $lh : \mathrm{PSPACE} \longrightarrow \mathbb{N}^+$, indutivamente, da seguinte forma:

1. $lh(E^{n,m}) := 1, \forall n, m \in \mathbb{N}$;
2. $lh(U_j^{n,m}) := 1, \forall n, m, j \in \mathbb{N}$ tais que $1 \leq j \leq n + m$;

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

Define-se a função comprimento de um símbolo de função, $lh : \mathrm{PSPACE} \longrightarrow \mathbb{N}^+$, indutivamente, da seguinte forma:

1. $lh(E^{n,m}) := 1$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$;
2. $lh(U_j^{n,m}) := 1$, $\forall n, m, j \in \mathbb{N}$ tais que $1 \leq j \leq n + m$;
3. $lh(S_i) := 1$, $\forall i \in \{0, 1\}$;

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

Define-se a função comprimento de um símbolo de função, $lh : \mathrm{PSPACE} \longrightarrow \mathbb{N}^+$, indutivamente, da seguinte forma:

1. $lh(E^{n,m}) := 1,\ \forall n, m \in \mathbb{N}$;
2. $lh(U_j^{n,m}) := 1,\ \forall n, m, j \in \mathbb{N}$ tais que $1 \leq j \leq n + m$;
3. $lh(S_i) := 1,\ \forall i \in \{0, 1\}$;
4. $lh(C) := 1$;

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

Define-se a função comprimento de um símbolo de função, $lh : \mathrm{PSPACE} \longrightarrow \mathbb{N}^+$, indutivamente, da seguinte forma:

1. $lh(E^{n,m}) := 1,\ \forall n, m \in \mathbb{N}$;
2. $lh(U_j^{n,m}) := 1,\ \forall n, m, j \in \mathbb{N}$ tais que $1 \leq j \leq n + m$;
3. $lh(S_i) := 1,\ \forall i \in \{0, 1\}$;
4. $lh(C) := 1$;
5. $lh(P) := 1$;

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

Define-se a função comprimento de um símbolo de função, $lh : \mathrm{PSPACE} \longrightarrow \mathbb{N}^+$, indutivamente, da seguinte forma:

1. $lh(E^{n,m}) := 1$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$;
2. $lh(U_j^{n,m}) := 1$, $\forall n, m, j \in \mathbb{N}$ tais que $1 \leq j \leq n + m$;
3. $lh(S_i) := 1$, $\forall i \in \{0, 1\}$;
4. $lh(C) := 1$;
5. $lh(P) := 1$;
6. $lh(SUB^{n,m}_{n',m'}[f, g_1, \ldots, g_{n'}, h_1, \ldots, h_{m'}]) :=$
   $1 + lh(g) + \sum_{i=1}^{n'} lh(g_i) + \sum_{i=1}^{m'} lh(h_i)$;

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

Define-se a função comprimento de um símbolo de função, $lh : \mathrm{PSPACE} \longrightarrow \mathbb{N}^+$, indutivamente, da seguinte forma:

1. $lh(E^{n,m}) := 1$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$;
2. $lh(U_j^{n,m}) := 1$, $\forall n, m, j \in \mathbb{N}$ tais que $1 \leq j \leq n + m$;
3. $lh(S_i) := 1$, $\forall i \in \{0, 1\}$;
4. $lh(C) := 1$;
5. $lh(P) := 1$;
6. $lh(SUB_{n',m'}^{n,m}[f, g_1, ..., g_{n'}, h_1, ..., h_{m'}]) :=$ $1 + lh(g) + \sum_{i=1}^{n'} lh(g_i) + \sum_{i=1}^{m'} lh(h_i)$;
7. $lh(TREC^{n+2;m}[g, h]) := 1 + lh(g) + lh(h)$;

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

Define-se a função comprimento de um símbolo de função, $lh : \mathrm{PSPACE} \longrightarrow \mathbb{N}^+$, indutivamente, da seguinte forma:

1. $lh(E^{n,m}) := 1, \forall n, m \in \mathbb{N}$;
2. $lh(U_j^{n,m}) := 1, \forall n, m, j \in \mathbb{N}$ tais que $1 \leq j \leq n + m$;
3. $lh(S_i) := 1, \forall i \in \{0, 1\}$;
4. $lh(C) := 1$;
5. $lh(P) := 1$;
6. $lh(SUB^{n,m}_{n',m'}[f, g_1, ..., g_{n'}, h_1, ..., h_{m'}]) :=$ $1 + lh(g) + \sum_{i=1}^{n'} lh(g_i) + \sum_{i=1}^{m'} lh(h_i)$;
7. $lh(TREC^{n+2;m}[g, h]) := 1 + lh(g) + lh(h)$;
8. $lh(TREE^{n+2;m+2}[g, h]) := 1 + lh(g) + lh(h)$;

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

1. $E^{n,m} \rightarrow E^{0,0}, \forall n, m \in \mathbb{N}$

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

1. $E^{n,m} \to E^{0,0}, \forall n, m \in \mathbb{N}$
2. $U_j^{n,m}(x_1, \ldots, x_n; x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) \to x_j, \quad 1 \leq j \leq n + m$

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

1. $E^{n,m} \rightarrow E^{0,0}, \forall n, m \in \mathbb{N}$
2. $U_j^{n,m}(x_1, \ldots, x_n; x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) \rightarrow x_j, \quad 1 \leq j \leq n + m$
3. $P(; E^{0,0}) \rightarrow E^{0,0}$

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

1. $E^{n,m} \rightarrow E^{0,0}$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$
2. $U_j^{n,m}(x_1, \ldots, x_n; x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) \rightarrow x_j, \quad 1 \leq j \leq n+m$
3. $P(; E^{0,0}) \rightarrow E^{0,0}$
4. $P(; S_i(; x)) \rightarrow x, \quad i \in \{0, 1\}$

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

1. $E^{n,m} \rightarrow E^{0,0}, \forall n, m \in \mathbb{N}$
2. $U_j^{n,m}(x_1, ..., x_n; x_{n+1}, ..., x_{n+m}) \rightarrow x_j, \quad 1 \leq j \leq n+m$
3. $P(; E^{0,0}) \rightarrow E^{0,0}$
4. $P(; S_i(; x)) \rightarrow x, \quad i \in \{0, 1\}$
5. $C(; \epsilon, y, z_0, z_1) \rightarrow y$

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

1. $E^{n,m} \to E^{0,0}, \forall n, m \in \mathbb{N}$
2. $U_j^{n,m}(x_1, \ldots, x_n; x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) \to x_j, \quad 1 \leq j \leq n + m$
3. $P(; E^{0,0}) \to E^{0,0}$
4. $P(; S_i(; x)) \to x, \quad i \in \{0, 1\}$
5. $C(; \epsilon, y, z_0, z_1) \to y$
6. $C(; S_i(; x), y, z_0, z_1) \to z_i, \quad i \in \{0, 1\}$

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

1. $E^{n,m} \to E^{0,0}, \forall n, m \in \mathbb{N}$
2. $U_j^{n,m}(x_1, \ldots, x_n; x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) \to x_j, \quad 1 \leq j \leq n + m$
3. $P(; E^{0,0}) \to E^{0,0}$
4. $P(; S_i(; x)) \to x, \quad i \in \{0, 1\}$
5. $C(; \epsilon, y, z_0, z_1) \to y$
6. $C(; S_i(; x), y, z_0, z_1) \to z_i, \quad i \in \{0, 1\}$
7. $SUB_{m';n'}^{m;n}[f, g_1, \ldots, g_{n'}, h_1, \ldots, h_{m'}](x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m) \to$ $f(g_1(x_1, \ldots, x_n;), \ldots, g_{n'}(x_1, \ldots, x_n;); h_1(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m), \ldots,$ $h_{m'}(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m))$

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

1. $E^{n,m} \to E^{0,0}, \; \forall n, m \in \mathbb{N}$
2. $U_j^{n,m}(x_1, \ldots, x_n; x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) \to x_j, \quad 1 \leq j \leq n+m$
3. $P(; E^{0,0}) \to E^{0,0}$
4. $P(; S_i(; x)) \to x, \quad i \in \{0, 1\}$
5. $C(; \epsilon, y, z_0, z_1) \to y$
6. $C(; S_i(; x), y, z_0, z_1) \to z_i, \quad i \in \{0, 1\}$
7. $SUB^{m;n}_{m';n'}[f, g_1, \ldots, g_{n'}, h_1, \ldots, h_{m'}](x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m) \to f(g_1(x_1, \ldots, x_n;), \ldots, g_{n'}(x_1, \ldots, x_n;); h_1(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m), \ldots, h_{m'}(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m))$
8. $TREC^{m+2;n}[g, h](E^{0,0}, S_i(; z), x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m) \to$ $\to TREE^{m+2;n+2}[g, h](E^{0,0}, S_i(; z), x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m,$ $TREC^{m+2;n}[g, h](S_0(; E^{0,0}), z, x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m),$ $TREC^{m+2;n}[g, h](S_1(; E^{0,0}), z, x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)), \quad i \in \{0, 1\}$

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

8. $TREE^{m+2;n+2}[g,h](p, S_i(; S_j(; z)), x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m,$
$TREC^{m+2;n}[g,h](S_0(; p), S_j(; z), x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m),$
$TREC^{m+2;n}[g,h](S_1(; p), S_j(; z), x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)) \to$
$TREE^{m+2;n+2}[g,h](p, S_i(; S_j(; z)), x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m,$
$TREE^{m+2;n+2}[g,h](S_0(; p), S_j(; z), x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m,$
$TREC^{m+2;n}[g,h](S_0(; S_0(; p)), z, x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m),$
$TREC^{m+2;n}[g,h](S_0(; S_1(; p)), z, x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)),$
$TREC^{m+2;n}[g,h](S_1(; p), S_j(; z), x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)), \quad i, j \in \{0, 1\}$

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

8. $TREE^{m+2;n+2}[g,h](p, S_i(;S_j(;z)), x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m,$
   $TREC^{m+2;n}[g,h](S_0(;p), S_j(;z), x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m),$
   $TREC^{m+2;n}[g,h](S_1(;p), S_j(;z), x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)) \to$
   $TREE^{m+2;n+2}[g,h](p, S_i(;S_j(;z)), x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m,$
   $TREE^{m+2;n+2}[g,h](S_0(;p), S_j(;z), x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m,$
   $TREC^{m+2;n}[g,h](S_0(;S_0(;p)), z, x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m),$
   $TREC^{m+2;n}[g,h](S_0(;S_1(;p)), z, x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)),$
   $TREC^{m+2;n}[g,h](S_1(;p), S_j(;z), x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)), \quad i, j \in \{0,1\}$
9. $TREE^{m+2;n+2}[g,h](p, S_i(;S_j(;z)), x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m, \underline{a},$
   $TREC^{m+2;n}[g,h](S_1(;p), S_j(;z), x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)) \to$
   $TREE^{m+2;n+2}[g,h](p, S_i(;S_j(;z)), x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m, \underline{a},$
   $TREE^{m+2;n+2}[g,h](S_1(;p), S_j(;z), x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m,$
   $TREC^{m+2;n}[g,h](S_0(;S_1(;p)), z, x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m),$
   $TREC^{m+2;n}[g,h](S_1(;S_1(;p)), z, x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m))), \quad i, j \in \{0,1\}$

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

10. $TREC^{m+2;n}[g, h](p, E^{0,0}, x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_m) \rightarrow g(p, E^{0,0}, x_1, ..., x_n; y_1, ..., y_m)$

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

10. $TREC^{m+2;n}[g,h](p, E^{0,0}, x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m) \rightarrow g(p, E^{0,0}, x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)$
11. $TREE^{m+2;n+2}[g,h](p, z, x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m, \underline{a}, \underline{b}) \rightarrow h(p, z, x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m, \underline{a}, \underline{b})$

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

8. $TREC^{m+2;n}[g,h](\epsilon, zi, \ldots) \rightarrow$
$TREE^{m+2;n+2}[g,h](\epsilon, zi, \ldots, TREC^{m+2;n}[g,h](0, z, \ldots),$
$TREC^{m+2;n}[g,h](1, z, \ldots)) \quad i \in \{0,1\}$

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

8. $TREC^{m+2;n}[g,h](\epsilon, zi, ...) \rightarrow$
$TREE^{m+2;n+2}[g,h](\epsilon, zi, ..., TREC^{m+2;n}[g,h](0, z, ...),$
$TREC^{m+2;n}[g,h](1, z, ...)) \quad i \in \{0,1\}$
9. $TREE^{m+2;n+2}[g,h](p, zji, ..., TREC^{m+2;n}[g,h](p0, zj, ...),$
$TREC^{m+2;n}[g,h](p1, zj, ...)) \rightarrow$
$TREE^{m+2;n+2}[g,h](p, zji, ..., TREE^{m+2;n+2}[g,h](p0, zj, ...,$
$TREC^{m+2;n}[g,h](p00, z, ...), TREC^{m+2;n}[g,h](p10, z, ...)),$
$TREC^{m+2;n}[g,h](p1, zj, ...)), \quad i, j \in \{0,1\}$

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

8. $TREC^{m+2;n}[g,h](\epsilon, zi, \ldots) \rightarrow$
$TREE^{m+2;n+2}[g,h](\epsilon, zi, \ldots, TREC^{m+2;n}[g,h](0, z, \ldots),$
$TREC^{m+2;n}[g,h](1, z, \ldots)) \quad i \in \{0,1\}$
9. $TREE^{m+2;n+2}[g,h](p, zji, \ldots, TREC^{m+2;n}[g,h](p0, zj, \ldots),$
$TREC^{m+2;n}[g,h](p1, zj, \ldots)) \rightarrow$
$TREE^{m+2;n+2}[g,h](p, zji, \ldots, TREE^{m+2;n+2}[g,h](p0, zj, \ldots,$
$TREC^{m+2;n}[g,h](p00, z, \ldots), TREC^{m+2;n}[g,h](p10, z, \ldots)),$
$TREC^{m+2;n}[g,h](p1, zj, \ldots)), \quad i,j \in \{0,1\}$
10. $TREE^{m+2;n+2}[g,h](p, zji, \ldots, \underline{a}, TREC^{m+2;n}[g,h](p1, zj, \ldots)) \rightarrow$
$TREE^{m+2;n+2}[g,h](p, zji, \ldots, \underline{a}, \; TREE^{m+2;n+2}[g,h](p1, zj, \ldots,$
$TREC^{m+2;n}[g,h](p10, z, \ldots), TREC^{m+2;n}[g,h](p11, z, \ldots))),$
$i,j \in \{0,1\}$

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

8. $TREC^{m+2;n}[g,h](\epsilon, zi, \ldots) \rightarrow$
   $TREE^{m+2;n+2}[g,h](\epsilon, zi, \ldots, TREC^{m+2;n}[g,h](0, z, \ldots),$
   $TREC^{m+2;n}[g,h](1, z, \ldots)) \quad i \in \{0,1\}$
9. $TREE^{m+2;n+2}[g,h](p, zji, \ldots, TREC^{m+2;n}[g,h](p0, zj, \ldots),$
   $TREC^{m+2;n}[g,h](p1, zj, \ldots)) \rightarrow$
   $TREE^{m+2;n+2}[g,h](p, zji, \ldots, TREE^{m+2;n+2}[g,h](p0, zj, \ldots,$
   $TREC^{m+2;n}[g,h](p00, z, \ldots), TREC^{m+2;n}[g,h](p10, z, \ldots)),$
   $TREC^{m+2;n}[g,h](p1, zj, \ldots)), \quad i,j \in \{0,1\}$
10. $TREE^{m+2;n+2}[g,h](p, zji, \ldots, \underline{a}, TREC^{m+2;n}[g,h](p1, zj, \ldots)) \rightarrow$
    $TREE^{m+2;n+2}[g,h](p, zji, \ldots, \underline{a}, \; TREE^{m+2;n+2}[g,h](p1, zj, \ldots,$
    $TREC^{m+2;n}[g,h](p10, z, \ldots), TREC^{m+2;n}[g,h](p11, z, \ldots))),$
    $i,j \in \{0,1\}$
11. $TREC^{m+2;n}[g,h](p, \epsilon, \ldots) \rightarrow g(p, \epsilon, \ldots)$

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

8. $TREC^{m+2;n}[g,h](\epsilon, zi, \ldots) \rightarrow$
   $TREE^{m+2;n+2}[g,h](\epsilon, zi, \ldots, TREC^{m+2;n}[g,h](0, z, \ldots),$
   $TREC^{m+2;n}[g,h](1, z, \ldots)) \quad i \in \{0,1\}$
9. $TREE^{m+2;n+2}[g,h](p, zji, \ldots, TREC^{m+2;n}[g,h](p0, zj, \ldots),$
   $TREC^{m+2;n}[g,h](p1, zj, \ldots)) \rightarrow$
   $TREE^{m+2;n+2}[g,h](p, zji, \ldots, TREE^{m+2;n+2}[g,h](p0, zj, \ldots,$
   $TREC^{m+2;n}[g,h](p00, z, \ldots), TREC^{m+2;n}[g,h](p10, z, \ldots)),$
   $TREC^{m+2;n}[g,h](p1, zj, \ldots)), \quad i,j \in \{0,1\}$
10.
   $TREE^{m+2;n+2}[g,h](p, zji, \ldots, \underline{a}, TREC^{m+2;n}[g,h](p1, zj, \ldots)) \rightarrow$
   $TREE^{m+2;n+2}[g,h](p, zji, \ldots, \underline{a}, \; TREE^{m+2;n+2}[g,h](p1, zj, \ldots,$
   $TREC^{m+2;n}[g,h](p10, z, \ldots), TREC^{m+2;n}[g,h](p11, z, \ldots))),$
   $i,j \in \{0,1\}$
11. $TREC^{m+2;n}[g,h](p, \epsilon, \ldots) \rightarrow g(p, \epsilon, \ldots)$
12. $TREE^{m+2;n+2}[g,h](p, z, \ldots, \underline{a}, \underline{b}) \rightarrow h(p, z, \ldots, \underline{a}, \underline{b})$

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

Caracterização de PSPACE via Regras de Reescrita

$$\mathrm{I}(f(x_1,\ldots,x_n;y_1,\ldots,y_m)) = \mathrm{I}_0(f)(|\phi(x_1)|,\ldots,|\phi(x_n)|)\times$$
$$\times\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{I}(x_i)+\sum_{i=1}^{n}\mathrm{I}(y_i)+lh(f)\right)$$

Obrigado!