$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "i"] & \Delta \otimes_B \Delta' \arrow[d, "v_1 \otimes b_1 \otimes_B b_2 \otimes"] \\ J \arrow[r, "\alpha"] & \Delta \otimes_B \Delta' \end{tikzcd}$$

Affine Cellular Algebras: Exemplos, Representações e Centro

Francisco Teixeira

FCUP

28 de Julho de 2021

Definição de ***Affine Celular Algebra*** (***ACA***)

Seja A uma k-álgebra unitária e i uma k-involução. Dizemos que um ideal J bilateral é um *Affine Celular Ideal* se

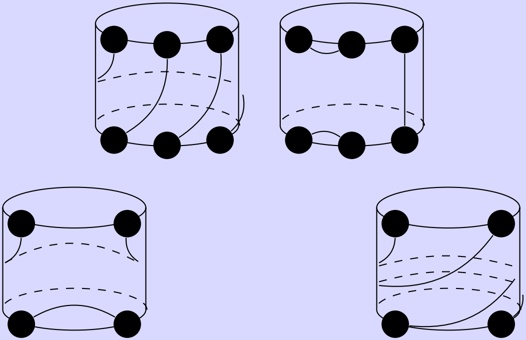
1. $i(J) = J$
2. Existe um k-módulo V livre de *rank* finito e uma *affine* k-álgebra B comutativa com uma k-involução σ tal que $\Delta = V \otimes_k B$ é um $A - B$-bimódulo, sendo a estrutura à direita a naturalmente induzida por B
3. Existe um isomorfismo de módulos bilateral α tal que o seguinte diagrama é comutativo, onde $\Delta' = B \otimes_k V$ é $B - A$-bimódulo, em que a estrutura à esquerda é a induzida por B e a direita por $(b \otimes v)a := \tau^{-1}(i(a)\tau(b \otimes v))$

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "i"] & \Delta \otimes_B \Delta' \arrow[d, "v_1 \otimes b_1 \otimes_B b_2 \otimes v_2 \mapsto v_2 \otimes \sigma(b_2) \otimes_B \sigma(b_1) \otimes v_1"] \\ J \arrow[r, "\alpha"] & \Delta \otimes_B \Delta' \end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned} \tau : \quad B \otimes V &\longrightarrow V \otimes B \\ b \otimes v &\longmapsto v \otimes \sigma(b) \end{aligned}$$

Por sua vez, A é uma *Affine Celular Algebra* se há uma decomposição em k-módulos $A = \bigoplus J'_i$ tal que $i(J'_i) = J'_i$ e que $J_j = \bigoplus J'_i$ seja uma cadeia de ideais bilaterais tal que J_j/J_{j-1} é um *Affine Cell Ideal* de A/J_{j-1}

Temperley-Lieb Algebras **(*TL*) como *ACA***



Na última apresentação, trabalhamos com as *TL*(nomeadamente, nos casos $n = 2$ e $n = 3$). De facto, estas são um exemplo de *ACA*.

Podemos definir a cadeia de ideais $J_0 \subset J_2 \subset ... \subset J_n$ em que J_i é gerado pelos diagramas com no máximo i arcos verticais, (equivalentemente, $J_1, J_3, \ldots, J_n$ se n ímpar). Por sua vez, estes ideais são da forma

$$J_i = J'_0 \oplus \cdots \oplus J'_i, \text{ se } n \text{ par}$$

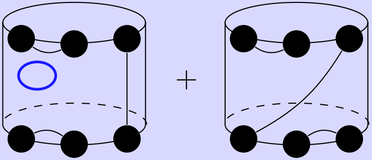
Onde J'_j são os diagramas com exatamente j arcos. Temos também $J_j/J_{j-2} \simeq (M_m(B_j), \psi_j)$ para uma certa matriz de multiplicação ψ_j e B_j certa $k-$álgebra comutativa (que, de modo geral, é um anel de polinómios ou de Laurent sobre um corpo)

A involução a considerar é de voltar ao contrário os diagramas (upside down)

Para simplicidade, vai-se considerar $q \neq 0$

Considere-se o seguinte exemplo. Em TL_3, na camada $J_1/0(\simeq J_1)$, podemos representar os elementos através de matrizes 3×3 (onde as linhas correspondem aos fundos dos diagramas e as colunas aos topos)

$$\begin{pmatrix} q & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$



Por sua vez, a multiplicação é feita utilizando esta matriz

$$\psi = \begin{pmatrix} q & 1 & x \\ 1 & q & x^{-1} \\ x^{-1} & x & q \end{pmatrix}$$

Por exemplo:

$$E_1 E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \psi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = qE_1$$

Como seria de esperar

Representações das *ACA*

Dizemos que um módulo M é simples (ou, no âmbito da Teoria da Representação, que é uma representação M é irredutível) se os únicos sub-módulos são 0 ou M. Equivalentemente, podemos dizer que M é simples se $\Lambda M \neq 0$ e $\forall m \in M, m \neq 0 \Rightarrow \Lambda m = M$
A classificação dos módulos simples é dada por:

Teorema (S. Koenig; C.C. Xi)

Seja A uma ACA com a cadeia de células

$$0 = J_0 \subset J_1 \subset \cdots \subset J_n = A$$

Tal que $J_j/J_{j-1} \simeq (M_n(B_j), \psi_j)$
Então há uma bijeção entre as classes de isomorfismo dos módulos simples de A e:

$$\left\{ (j, \mathfrak{m}) \;\middle|\; j \in \{1, \dots, n\} \text{ e } \begin{array}{l} \mathfrak{m} \text{ é ideal maximal de} \\ B_j \text{ tal que há uma entrada de} \\ \psi_j \text{ que não pertença a } \mathfrak{m} \end{array} \right\}$$

Módulos simples de $\boldsymbol{TL}_2$

Seja L um módulo simples de $TL_2 \simeq k[\tau^{\pm 1}] \oplus (M_2(k[x]), \psi)$
Então temos[1]:

1. $(M_2(k[x]), \psi)L = 0$, ou
2. $(M_2(k[x]), \psi)L \neq 0$

Se (1), então L é um $k[\tau^{\pm 1}]$-módulo simples. Então, tendo $v \in L$ tal que $v \neq 0$ e φ sobrejetiva com:

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & k[\tau^{\pm 1}] & \longrightarrow & L \\ & a & \longmapsto & av \end{array}$$

Temos então:

$$L \simeq k[\tau^{\pm 1}] / \ker(\varphi)$$

Podemos ver que $\ker(\varphi)$ é maximal, sendo então do tipo $\langle \tau - \lambda \rangle, \lambda \in k \setminus \{0\}$
E assim:

$$L \simeq k[\tau^{\pm 1}] / \langle \tau - \lambda \rangle$$

[1] Nota: Assume-se k algebricamente fechado

Se não acontecer (1), temos então que L é um $(M_2(k[x]), \psi)$-módulo simples. L vai corresponder a um $M_2(k[x])$-módulo E dado pelo seguinte teorema:

Teorema (S. Koenig; C.C. Xi)

Existe uma bijeção entre o conjunto dos $M_2(k[x])$-módulos E simples não isomorfos tais que $M_2(k[x])\psi E \neq 0$ e o conjunto dos $(M_2(k[x], \psi)$-módulos simples não isomorfos.

Note-se que se E é módulo simples sobre $M_2(k[x])$, existe um ideal maximal $m = \langle x - \mu \rangle, \mu \neq 0$ em $k[x]$ tal que $M_2(m)E = 0$. Assim,

$$M_2(k[x])\psi E = 0 \Leftrightarrow \psi E = 0 \Leftrightarrow \psi \in M_2(m)$$

Que corresponde à condição do teorema na página 10

Centro de $\boldsymbol{TL}_2$

Na apresentação anterior mostrei uma dedução do centro de TL_2 e TL_3, usando definições alternativas dos seus elementos $(E_1, E_2, \tau,$ etc). Não se usaram ideias relativas a *ACA*

Podemos encontrar estes centros ao mergulhar estas álgebras noutras maiores com uma estrutura mais simples

Partindo de A *ACA* com uma cadeia $0 = J_0 \subset J_1 \subset \cdots \subset J_n = A$ com $J_j / J_{j-1} \simeq (M_{m_j}(B_j), \psi_j)$, dizemos que $M_{m_1}(B_1) \times \cdots \times M_{m_n}(B_n)$ é a sua *Assymptotic Algebra*

Teorema (2017)

Seja A ACA com uma cadeia como descrita acima, sendo $m = \min\{s | r.\mathrm{ann}_{A/J_{s-1}}(J_s/J_{s-1}) = 0\}$ e tendo:

$$\phi : A \to \mathrm{End}({}_{A/J_{m-1}}J_m/J_{m-1}) \times \cdots \times \mathrm{End}({}_A J_0)$$

em que $\phi(a) = (p_a^m, \ldots, p_a^0)$, onde p_a^x é a ação de a na camada J_x/J_{x-1}
Se A/J_j semiprimo para $j \in \{0, \ldots, m-1\}$, então $\mathrm{End}({}_{A/J_{j-1}}J_j/J_{j-1}) \simeq M_{n_j}(B_j)$, $j \in \{0, \ldots, m\}$ e temos

$$c(A) = \phi^{-1}(B_m \times \cdots \times B_0)$$

Podemos então obter o centro de TL_2 da seguinte maneira

$TL_2 = k[\tau^{\pm 1}] \oplus M_2(k[x])$
Com o embedding em $k[\tau^{\pm 1}] \times M_2(k[x])$

$$\phi(f(\tau) + M) = (f(\tau), f(T) + M\psi)$$

Em que:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \psi = \begin{pmatrix} q & x \\ x & q \end{pmatrix}$$

Assim:

$$\begin{aligned} c(TL_2) &= \phi^{-1}(c(k[\tau^{\pm 1}]) \times c(M_2(k[x]))) \\ &= \phi^{-1}\left(k[\tau^{\pm 1}] \times \left\{\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}, \, g \in k[x]\right\}\right) \end{aligned}$$

Mas, sendo:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ e } f(X) = m(X^2)X + h(X^2)$$

Temos:

$$f(T) + M\psi = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} h(1) & m(1) \\ m(1) & h(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} aq + bx & ax + bq \\ cq + dx & cx + dq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$$

Ficamos com as equações:

$$\begin{array}{rcrcl} (a-d)q & + & (c-b)x & = & 0 \\ (a-d)x & + & (b-c)q & = & 0 \end{array}$$

Que, como $(a-d)$ e $(c-b)$ têm graus diferentes, nos diz que $a = d$ e $c = b$
Sobra então a equação:

$$ax + bq + m(1) = 0$$

Que com a condição anterior descreve exatamente o centro que mostrei na ultima apresentação.

$$\boxed{\begin{array}{c} Z(\mathit{TL}_2) = \\ \left\{ \begin{array}{ccc} aE_1 + aE_2 + b\mathcal{T}E_1 + b\mathcal{T}E_2 & & a, b, \in k[x], c_i, d_i \in k \\ +\sum c_i \mathcal{T}^{2k_i+1} + \sum d_i \mathcal{T}^{2z_i} & : & \text{e } ax + bq + \sum c_i = 0 \\ & & \end{array} \right\} \end{array}}$$

Podemos repetir para TL_3, embora este procedimento não dê resultados muito explícitos

Um elemento central em *ACA*s

Podemos encontrar em certas *ACA* um elemento central, a partir da última camada
Tendo a cadeia:

$$0 = J_{-1} \subset J_0 \subset \cdots \subset J_n = A$$

Temos que $J_0/J_{-1} \simeq J_0/0 = J_0$ é isomorfo a $(M_n(B), \psi)$ por um isomorfismo de módulos (bilateral) α
Vamos ver que o elemento:

$$z = \alpha^{-1}(\psi^+)$$

é central em A, se B for um domínio e ψ tiver determinante não nulo

z é central em J_0

Seja $m \in J_0$. Embora α tenha sido definido como isomorfismo de módulos, dada a multiplicação definida em J e $(M_n(B), \psi)$ podemos vê-lo como um isomorfismo de anéis, pois:

$$u\psi w = u \cdot w \overset{def}{=} \alpha(\alpha^{-1}(u)\alpha^{-1}(w))$$

Assim:

$$\alpha(w)\psi\alpha(z) = \alpha(\alpha^{-1}(\alpha(w))\alpha^{-1}(\alpha(z))) = \alpha(wz)$$

Continuando:

$$\alpha(mz) = \alpha(m) \cdot \alpha(z) =$$

$$\alpha(m)\psi\psi^{+} = \alpha(m)\,\mathsf{det}(\psi) = \psi^{+}\psi\alpha(m) = \alpha(zm)$$

Que nos diz, então, que $zm = mz$

z^2 é central em A

Seja $a \in A$. Então,

$$az^2 = \underbrace{az}_{\in J_0} z = \underbrace{za}_{\in J_0} z = z^2 a$$

z é central em A

Seja $a \in A$, então temos $az^2 - z^2a = 0$

$$\Rightarrow \alpha(az^2 - z^2a) = \alpha(az^2) - \alpha(z^2a) = 0$$

Por ser um isomorfismo de $A-$módulos bilateral e de anéis:

$$\begin{aligned} 0 &= a\alpha(z^2) - \alpha(z^2)a \\ &= a\psi^+\psi\psi^+ - \psi^+\psi\psi^+a \\ &= \mathsf{det}(\psi)(\alpha(az - za)) \end{aligned}$$

Se $\mathsf{det}(\psi) \neq 0$, temos, então (já que estamos a trabalhar com domínios) $az = za$

Um "Toy problem"

Seja $A = k[G] \oplus J$ onde $J = (M_n(B), \psi)$. A ação de G sobre J é a seguinte:
Dado um homomorfismo de grupos

$$\rho : G \to S_n$$

Se $g \in G$ então:

$$g \cdot (bE_{ij}) = bE_{\rho(i)j}$$
$$(bE_{ij}) \cdot g = bE_{i\rho^{-1}(j)}$$

Para este exemplo concreto vai-se ter $G = \mathbb{Z}_2^2$, $n = 4$ e

$$\rho((1,0)) = (\,1\,2\,)$$

$$\rho((0,1)) = (\,3\,4\,)$$

Supomos que B domínio e ψ simétrica com determinante não nulo e satisfazendo algumas condições que permitirão A ser uma álgebra associativa.

Podemos considerar σ a involução que em J atua como a transposição e em $k[G]$ leva $g \in G$ em g^{-1}. Daí pode-se ver que A é *ACA*

Vamos encontrar os elementos centrais em A seguindo estes passos:

1. Elementos centrais em $J = (M_n(B), \psi)$
2. Elementos centrais em $k[G]$
3. Elementos que não estejam contidos num dos dois

1.

Seja $M \in M_n(B) \cap c(A)$. Em particular, $M \in c(J)$ ou seja:

$$\forall X \in M_n(B), M\psi X = X\psi M$$

Em particular, como $1 \in B$, temos que:

$$M\psi = \psi M$$

Combinando isso com a informação de cima, se M é central:

$$M\psi X = X\psi M = XM\psi$$

Ou seja, $M\psi \in c(M_n(B))$, donde se conclui que $M\psi = bI_n, b \in B$
Daí:

$$M\psi = bI_n \Rightarrow M\,\mathsf{det}(\psi) = b\psi^+$$

1.

Do facto de ψ ser simétrica vem que M é simétrica.
Falta ainda considerar os efeitos das ações de G sobre as matrizes.
Terão de ser analisadas os efeitos das permutações (em notação cíclica) $(1\,2)$ e $(3\,4)$. Uma vez que M é simétrica, será da forma:

$$M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_3 & y_2 & z_1 & z_2 \\ x_4 & y_3 & z_2 & w_1 \end{pmatrix}$$

Assim, considerando que $(1\,2)^{-1} = (1\,2)$ e $(3\,4)^{-1} = (3\,4)$

$$(1\,2)M = \begin{pmatrix} x_2 & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_3 & y_2 & z_1 & z_2 \\ x_4 & y_3 & z_2 & w_1 \end{pmatrix} = M(1\,2) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 & x_3 & x_4 \\ y_1 & x_2 & y_2 & y_3 \\ y_2 & x_3 & z_1 & z_2 \\ y_3 & x_4 & z_2 & w_1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow (x_1, x_3, x_4) = (y_1, y_2, y_3)$$

1.

Procedendo de maneira análoga para $(3\,4)$:

$$(3\,4)M = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_4 & y_3 & z_2 & w_1 \\ x_3 & y_2 & z_1 & z_2 \end{pmatrix} = M(3\,4) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_4 & x_3 \\ x_2 & y_1 & y_3 & y_2 \\ x_3 & y_2 & z_2 & z_1 \\ x_4 & y_3 & w_1 & z_2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow (x_3, y_2, z_1) = (x_4, y_3, w_1)$$

Assim, podemos definir o conjunto:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 & x_3 \\ x_3 & x_3 & z_1 & z_2 \\ x_3 & x_3 & z_2 & z_1 \end{pmatrix}, x_i, z_i \in B \right\}$$

E concluir que

$$c(A) \cap J = c(J) \cap L$$

2.

Os elementos da camada do topo são da forma:

$$p = a\mathsf{id} + b(\,1\,2\,) + c(\,3\,4\,) + d(\,1\,2\,)(\,3\,4\,)$$

Mas analisando o elemento da camada inferior: E_{13} temos que para ser central:

$$pE_{13} = aE_{13} + bE_{23} + cE_{13} + dE_{23} = E_{13}p = aE_{13} + bE_{13} + cE_{14} + dE_{14}$$

$$\Rightarrow b = c; \quad b + d = 0;$$

2.

De facto isto dá uma condição necessária e suficiente para pertencer ao centro. Podemos ver:

$$pE_{ij} = aE_{ij} + bE_{\sigma(i)j} + bE_{ij} - bE_{\sigma(i)j} = (a+b)E_{ij}$$

$$E_{ij}p = aE_{ij} + bE_{i\sigma(j)} + bE_{ij} - bE_{i\sigma(j)} = (a+b)E_{ij}$$

Como $G \simeq \mathbb{Z}_2^2$ é abeliano, sabemos que estes elementos são centrais $k[G]$ e consequentemente em A. Assim:

$$c(A) \cap k[G] = k\mathrm{id} + k\Big((\,1\,2\,) + (\,3\,4\,) - (\,1\,2\,)(\,3\,4\,)\Big)$$

3.

Seja $P = a + b(12) + c(34) + d(12)(34) + M$. Como G é abeliano, podemos concluir imediatamente que M é estável para a ação de G. Pode ser visto que o conjunto dos estáveis L^* é composto de matrizes do tipo:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & c \\ b & a & c & c \\ d & d & e & f \\ d & d & f & e \end{pmatrix}$$

Ao mesmo tempo, multiplicando por I_n (que também é estável) podemos ver que $M\psi = \psi M$, e podemos concluir que $M\psi \in C_{M_n(B)}(L^*)$ tomando a forma

$$\begin{pmatrix} x & y & 0 & 0 \\ y & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & f & e \end{pmatrix}$$

A partir daqui podemos extrair mais informação sobre x, y, e, f verificando os produtos pelos elementos E_{ij} (sendo que, no máximo, apenas temos de o fazer 16 vezes)

As condições resultantes serão necessárias e suficientes para pertencer ao centro

Questões?