Caminhos Monocromáticos nos Inteiros

David Nassauer, IST

28 de Julho de 2021

Teorema de Van der Waerden (1927)

Teorema

Em qualquer coloração finita dos naturais existem progressões aritméticas monocromáticas de comprimento arbitrariamente grande.

Teorema de Van der Waerden (1927)

Teorema

Em qualquer coloração finita dos naturais existem progressões aritméticas monocromáticas de comprimento arbitrariamente grande.

Motivação

Consideremos o seguinte jogo: o André pinta os naturais usando no máximo r cores, e escolhe um natural k.
De seguida a Beatriz tem de encontrar uma progressão aritmética monocromática de comprimento mínimo k.

Motivação

Consideremos o seguinte jogo: o André pinta os naturais usando no máximo r cores, e escolhe um natural k.

De seguida a Beatriz tem de encontrar uma progressão aritmética monocromática de comprimento mínimo k.

Motivação

Consideremos o seguinte jogo: o André pinta os naturais usando no máximo r cores, e escolhe um natural k.
De seguida a Beatriz tem de encontrar uma progressão aritmética monocromática de comprimento mínimo k.

E se a Beatriz tiver apenas de encontrar k números $a_1, \cdots, a_k$ monocromáticos tais que $a_{i+1} - a_i$ é um quadrado perfeito?

Motivação

Consideremos o seguinte jogo: o André pinta os naturais usando no máximo r cores, e escolhe um natural k.
De seguida a Beatriz tem de encontrar uma progressão aritmética monocromática de comprimento mínimo k.

E se a Beatriz tiver apenas de encontrar k números $a_1, \cdots, a_k$ monocromáticos tais que $a_{i+1} - a_i$ é um quadrado perfeito?
E se André escolher $k = \infty$?

r-Escadas

Definição

Um conjunto de naturais S é chamado r-escada se para qualquer coloração com r cores dos naturais existem progressões aritméticas monocromáticas de comprimento arbitrariamente grande com diferença comum $x \in S$.

r-Escadas

Definição

Um conjunto de naturais S é chamado r-escada se para qualquer coloração com r cores dos naturais existem progressões aritméticas monocromáticas de comprimento arbitrariamente grande com diferença comum $x \in S$.

Por exemplo, o conjunto $\{2\}$ não é uma 2-escada, já que a coloração $110011001100\cdots$ evita progressões aritméticas de diferença comum 2.

Escadas

Definição

Um conjunto de naturais S é chamado escada se é uma r-escada para qualquer natural r.

Escadas

Definição

Um conjunto de naturais S é chamado escada se é uma r-escada para qualquer natural r.

O teorema de Van der Waerden afirma que $\mathbb{N}$ é uma escada - isto é, em qualquer coloração finita dos naturais existem progressões aritméticas monocromáticas arbitrariamente grandes.

Robustez

Teorema

Se $S_1 \cup S_2$ é uma escada, então S_1 é uma escada ou S_2 é uma escada.

Robustez

Teorema

Se $S_1 \cup S_2$ é uma escada, então S_1 é uma escada ou S_2 é uma escada.

Demonstração.

Se S_1 não for uma escada, existe uma coloração $\alpha_1(x)$ dos naturais que evita progressões aritméticas de tamanho k. Analogamente existe tal coloração $\alpha_2(x)$ se S_2 não for escada.

Robustez

Teorema

Se $S_1 \cup S_2$ é uma escada, então S_1 é uma escada ou S_2 é uma escada.

Demonstração.

Se S_1 não for uma escada, existe uma coloração $\alpha_1(x)$ dos naturais que evita progressões aritméticas de tamanho k. Analogamente existe tal coloração $\alpha_2(x)$ se S_2 não for escada.
Considerando a coloração $\beta(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x))$ (o produto cartesiano das duas colorações), podemos ver que esta evita proressões aritméticas longas com diferença em $S_1 \cup S_2$. $\square$

Outras Propriedades

Teorema

Se S é uma escada, então $S \cap n\mathbb{N}$ é uma escada para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Outras Propriedades

Teorema

Se S é uma escada, então $S \cap n\mathbb{N}$ é uma escada para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração.

Consideremos uma coloração arbitrária dos naturais $\alpha(x)$. A partir desta, construímos a coloração $(\alpha(x), x \pmod{n})$. Como S é uma escada existem progressões aritméticas monocromáticas arbitrariamente grandes com diferença em S. Mas a diferença entre dois elementos da mesma cor nesta nova coloração é múltipla de n (por construção).

Outras Propriedades

Teorema

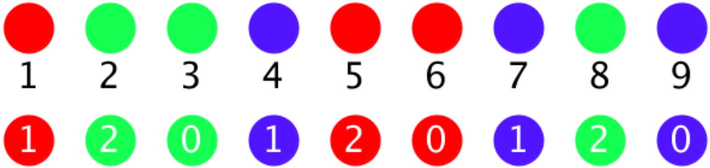
Se S é uma escada, então $S \cap n\mathbb{N}$ é uma escada para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração.

Consideremos uma coloração arbitrária dos naturais $\alpha(x)$. A partir desta, construímos a coloração $(\alpha(x), x \pmod n)$. Como S é uma escada existem progressões aritméticas monocromáticas arbitrariamente grandes com diferença em S. Mas a diferença entre dois elementos da mesma cor nesta nova coloração é múltipla de n (por construção). Ou seja, existem progressões aritméticas monocromáticas na coloração simples $\alpha(x)$ com diferença comum múltipla de n, e portanto $S \cap n\mathbb{N}$ é uma escada. □

Outras Propriedades

Outras Propriedades



Conjuntos acessíveis

Definição

Um conjunto de naturais S diz-se r-acessível se para qualquer coloração com r cores dos naturais existem conjuntos monocromáticos $\{a_1, \cdots, a_k\}$ arbitrariamente grandes tais que $a_{i+1} - a_i \in S$.

Conjuntos acessíveis

Definição

Um conjunto de naturais S diz-se r-acessível se para qualquer coloração com r cores dos naturais existem conjuntos monocromáticos $\{a_1, \cdots, a_k\}$ arbitrariamente grandes tais que $a_{i+1} - a_i \in S$.

Definição

Se S for r-acessível para qualquer $r \in \mathbb{N}$, dizemos que S é acessível.

Primos

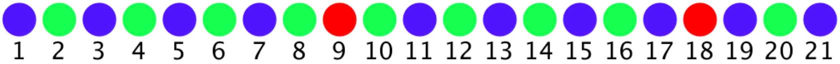
Exemplo

O conjunto dos números primos $\mathbb{P}$ *não é 3-acessível.*

Primos

Exemplo

O conjunto dos números primos $\mathbb{P}$ *não é 3-acessível.*



Primos

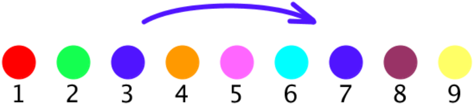
Demonstração.

Colorimos os naturais da seguinte forma:

$$\begin{cases} \alpha(x) = 0 & x \equiv 0 \pmod 9 \\ \alpha(x) = 1 & x \equiv 0 \pmod 2 \wedge x \not\equiv 0 \pmod 9 \\ \alpha(x) = 2 & x \equiv 1 \pmod 2 \wedge x \not\equiv 0 \pmod 9 \end{cases}$$

A única diferença possível é 2. Mas acabamos sempre por chegar a um múltiplo de 9. □

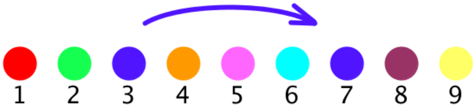
Intersetividade



Definição

Dizemos que S é um conjunto cromaticamente intersetivo se para qualquer coloração finita dos naturais $\alpha : \mathbb{N} \to [1, r]$ existe uma cor d tal que existem naturais a, b tal que $\alpha(a) = \alpha(b) = d$ e $a - b \in S$.

Intersetividade



Definição

Dizemos que S é um conjunto cromaticamente intersetivo se para qualquer coloração finita dos naturais $\alpha : \mathbb{N} \to [1, r]$ existe uma cor d tal que existem naturais a, b tal que $\alpha(a) = \alpha(b) = d$ e $a - b \in S$.

Por outras palavras, queremos apenas encontrar dois elementos da mesma cor cuja diferença esteja em S.

Intersetividade = Acessibilidade

É óbvio que acessibilidade implica intersetividade, mas o converso também é verdade!

Intersetividade = Acessibilidade

É óbvio que acessibilidade implica intersetividade, mas o converso também é verdade!

Teorema

Um conjunto S é cromaticamente intersetivo se e só se S é acessível.

Intersetividade = Acessibilidade

É óbvio que acessibilidade implica intersetividade, mas o converso também é verdade!

Teorema

Um conjunto S é cromaticamente intersetivo se e só se S é acessível.

Demonstração.

Suponhamos que S é intersetivo, mas que existe um valor $k_r \geq 2$ tal que todas as sequências monocromáticas com diferenças em S para uma r-coloração $\alpha : \mathbb{N} \to [1, r]$ têm no máximo comprimento k_r. Seja $k = min(k_r)$ sobre todos os naturais r. $\square$

Demonstração

Demonstração.

Se $a_1, \cdots, a_k$ e $b_1, \cdots, b_k$ são duas sequências máximas monocromáticas com diferenças em S, então $a_k = b_i \Rightarrow i = k$ (caso contrário seria possível encontrar uma sequência de comprimento maior).

Demonstração

Demonstração.

Se $a_1, \cdots, a_k$ e $b_1, \cdots, b_k$ são duas sequências máximas monocromáticas com diferenças em S, então $a_k = b_i \Rightarrow i = k$ (caso contrário seria possível encontrar uma sequência de comprimento maior).
Construimos agora a coloração $\beta : \mathbb{N} \to [1, 2r]$ como $\beta(x) = \alpha(x)$, caso x não seja o último elemento de nenhuma sequência máxima, e $\beta(x) = \alpha(x) + r$ caso contrário.

Demonstração

Demonstração.

Se $a_1, \cdots, a_k$ e $b_1, \cdots, b_k$ são duas sequências máximas monocromáticas com diferenças em S, então $a_k = b_i \Rightarrow i = k$ (caso contrário seria possível encontrar uma sequência de comprimento maior).
Construimos agora a coloração $\beta : \mathbb{N} \to [1, 2r]$ como $\beta(x) = \alpha(x)$, caso x não seja o último elemento de nenhuma sequência máxima, e $\beta(x) = \alpha(x) + r$ caso contrário.
Nesta coloração o tamanho máximo de uma sequência máxima monocromática com diferença em S é menor que k, o que contradiz a suposição de que k é mínimo. $\square$

Conjuntos Passeáveis

Definição

Um conjunto S diz-se r-passeável se para qualquer coloração com r cores dos naturais existem caminhos infinitos *monocromáticos com diferenças consecutivas em S.*

Conjuntos Passeáveis

Definição

Um conjunto S diz-se r-passeável se para qualquer coloração com r cores dos naturais existem caminhos infinitos *monocromáticos com diferenças consecutivas em S.*

Definição

A ordem de um conjunto S ($ord(S)$) é o maior natural r tal que S é r-passeável.
Se não existir tal natural dizemos que $ord(S) = \infty$ e que S é passeável

Conjuntos passeáveis

Teorema

Se $S = s_1, s_2, \cdots$ é um conjunto passeável, então

$$\liminf(s_{i+1} - s_i)$$

é finito.

Conjuntos passeáveis

Teorema

Se $S = s_1, s_2, \cdots$ é um conjunto passeável, então

$$\liminf(s_{i+1} - s_i)$$

é finito.

Teorema

Mais geralmente, se

$$\liminf(s_{i+k} - s_i)$$

é infinito, então $ord(S) \leq k + 1$.

Quadrados perfeitos

Exemplo

Se S é o conjunto dos quadrados perfeitos, $ord(S) = 2$.

Quadrados perfeitos

Exemplo

Se S é o conjunto dos quadrados perfeitos, $ord(S) = 2$.

Demonstração.

A ideia será mostrar que que é possível encontrar um passeio nos quadrados perfeitos, cujas diferenças estão em S. $\square$

Trabalho para casa

Problema

Será que S ser uma r-escada implica que S é uma $r + 1$-escada?

Trabalho para casa

Problema

Será que S ser uma r-escada implica que S é uma $r+1$-escada?

Problema

Será que existe uma escada S tal que $ord(S) = 1$?

Trabalho para casa

Problema

Será que S ser uma r-escada implica que S é uma $r+1$-escada?

Problema

Será que existe uma escada S tal que $ord(S) = 1$?

Problema

Os números primos são 2-passeáveis? E 2-acessíveis?

O Fim

Obrigado

Referências

- Guerreiro, J.; Ruzsa, I.Z.; Silva, M. *Monochromatic paths for the integers*. European Journal of Combinatorics (2016). `https://arxiv.org/pdf/1606.00418.pdf`
- Berger, A. (2017) *Progressions and Paths in Colorings of Z*. `https://arxiv.org/pdf/1706.01579.pdf`