e-Formações de Semigrupos R-unipotentes

ANA CATARINA MONTEIRO

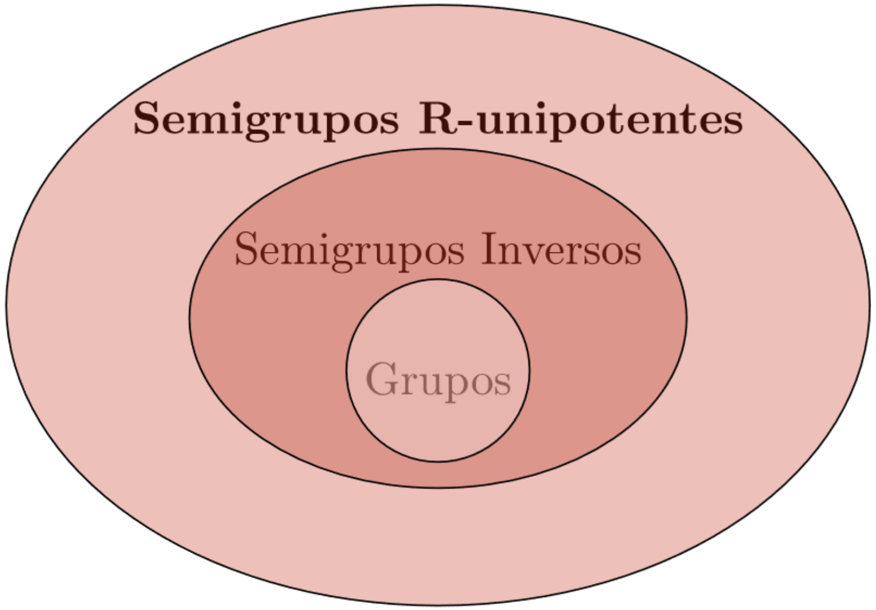
TUTORA: GRACINDA GOMES, FCUL

Semigrupos R-unipotentes

Definição: Um semigrupo S diz-se R-unipotente se:

✓ $\forall a \in S,\ \exists a' \in S: aa'a = a$;

✓ $\forall e, f \in E(S),\ efe = ef$.



Semigrupos R-unipotentes

Proposição: Seja S um semigrupo regular. São equivalentes:

1) S é um semigrupo R-unipotente;
2) $\forall a \in S, a', a'' \in V(a),\ aa' = aa''$;
3) $\forall a \in S,\ e \in E(S),\ a', a'' \in V(a),\ aea' = aea''$;
4) $\forall a \in S, a' \in V(a),\ e \in E(S), aea'a = ae.$

Semigrupos R-unipotente – Exemplo 1

- ✓ T semigrupo inverso $\Rightarrow$ T semigrupo R-unipotente. Então,

  Seja $\mathrm{X} = \{1,2,3\}$. Temos que

$$T := \left\{ \emptyset; \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

é um semigrupo R-unipotente.

Semigrupos R-unipotente – Exemplo 2

- ✓ S é uma **banda** se $\forall e \in S,\ e^2 = e$.
- ✓ S é uma **banda regular esquerda** se $\forall e, f \in S,\ efe = ef$.
- ✓ S banda regular esquerda $\Rightarrow$ S semigrupo R-unipotente. Então,

  Seja X = {1,2,3}. Temos que

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

é um semigrupo R-unipotente.

Semigrupos R-unipotente – Exemplo 3

- ✓ S semigrupo R-unipotente, T semigrupo inverso $\Rightarrow$ $S \times T$ semigrupo R-unipotente. Então, seja

$$X \coloneqq \{1,2,3\},\ S \coloneqq \left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\},\ T \coloneqq \left\{\emptyset;\ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}.$$

$S \times T$ é um semigrupo R-unipotente.

e-Variedades *(existence varieties)*

- Variedade de semigrupos inversos: **Generalização**
  - T.E.Hall
    - **e-variedade**
  - J. Kadourek e M. Szendrei
    - bivariedade

Definição: Uma classe de semigrupos regulares (finitos) $\mathcal{V}$ diz-se uma **e-variedade** se:

✓Se $S \in \mathcal{V}$ e T subsemigrupo **regular** de S, então $T \in \mathcal{V}$;

✓Se $S \in \mathcal{V}$ e $\theta\colon\ S \twoheadrightarrow T$, então $T \in \mathcal{V}$;

✓Se S é produto direto de $S_i,\ i \in I$, (I finito) tal que $S_i \in \mathcal{V},\ i \in I$, então $S \in \mathcal{V}$.

e-Variedades (*existence varieties*) – *Exemplos*

1) A classe de todos os semigrupos regulares;
2) A classe de todos os semigrupos R-unipotentes;
3) A classe de todos os semigrupos ortodoxos *;
4) A classe de todas as bandas;
5) A classe de todos os semigrupos regulares localmente inversos.**

* Um semigrupo S diz-se <u>ortodoxo</u> se for regular e o conjunto dos idempotentes formar um subsemigrupo.

** Um semigrupo S é <u>localmente inverso</u> se, para cada $e = e^2 \in S$, eSe for inverso.

e-Formações

Definição: Uma classe de semigrupos regulares (finitos) $\mathcal{F}$ diz-se uma **e-formação** se:

✓Se $S \in \mathcal{F}$ e θ: $S \twoheadrightarrow T$, então $T \in \mathcal{F}$;

✓Se S é produto subdireto **regular** de S_i, $i \in I$, (I finito) tal que $S_i \in \mathcal{F}$, $i \in I$, então $S \in \mathcal{F}$.

Relembrar:

S é produto subdireto de S_1 e S_2, semigrupos, se existe

$$\phi: S \hookrightarrow S_1 \times S_2, a \mapsto (a_1, a_2)$$

um mergulho tal que, para $i = 1,2$,

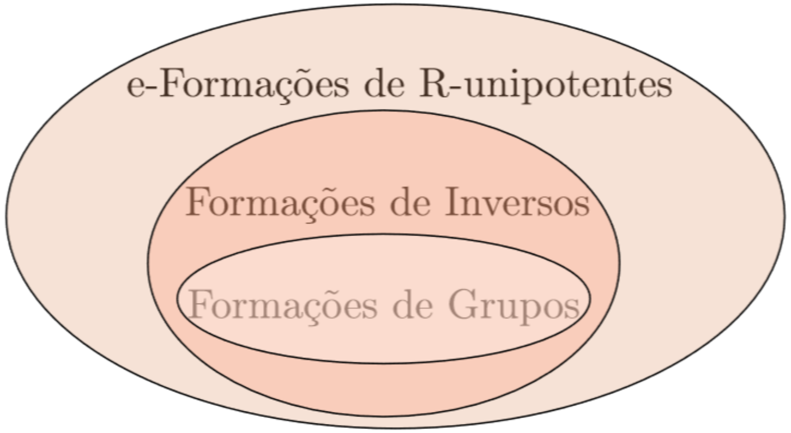
$$\pi_i\phi: S \longrightarrow S_i, \ \ a \mapsto a_i$$

é um morfismo sobrejetivo.

e-Formações - Exemplos

1) A classe de todos os semigrupos regulares.

2) A formação gerada pelo grupo alterno A_5



e-Formações

Definição: Seja S um semigrupo R-unipotente. Chamamos **neutralizador** de $E(S)$ em S ao conjunto,

$$E\eta = \{s \in S: ss'es = se, \forall e \in E(S),\ s' \in V(S)\}$$

Definição: Seja S um semigrupo R-unipotente. Um subsemigrupo N de S diz-se **i-normal** se for cheio, estiver contido no neutralizador, se for fechado para conjugados $(\forall a \in S, a' \in V(a), a'Na \subseteq N)$, e fechado para inversos $(\forall a \in N, V(a) \subseteq N)$.

e-Formações

S semigrupo R-unipotente e $N \trianglelefteq_i S$. Define-se,

$$\forall a, b \in S,\ a\rho_N b \Leftrightarrow a'b \in N,\ aa' = bb',\ \text{para certos}\ \ a' \in V(a),\ b' \in V(b)$$

onde $ker\rho_N = N$.

Proposição: Seja S um semigrupo R-unipotente e N subsemigrupo i-normal. Então, dados $a, b \in S$,

$$a\rho_N b \Leftrightarrow a\mathcal{R}b,\ a\mathrm{N} = b\mathrm{N}\ \Leftrightarrow a\mathcal{H}b,\ a\mathrm{N} = b\mathrm{N}$$

Relembrar:

$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow \exists x, y \in S: ax = b,\ by = a$$

$$a\mathcal{H}b \Leftrightarrow \exists x_1, x_2, y_1, y_2 \in S: ax_1 = b,$$
$$by_1 = a,\ x_2a = b,\ y_2b = a$$

ie-Formações

Definição: Uma classe de semigrupos R-unipotentes $\mathcal{F}$ diz-se uma **ie-formação** se:

✓Se $S \in \mathcal{F}$ e $\theta\colon S \twoheadrightarrow T$ é um morfismo sobrejetivo que **separa idempotentes**, então $T \in \mathcal{F}$;

✓Se S é produto subdireto regular de $S_1, \dots, S_n$ tal que $S_i \in \mathcal{F}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, e cujas projeções **separam idempotentes**, então $S \in \mathcal{F}$.

ie-Formações

Proposição: Seja $\mathcal{F}$ uma classe de semigrupos R-unipotentes tal que $\{1\} \in \mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$ é uma ie-formação se e só se as seguintes condições se verificarem:

1) $S \in \mathcal{F},\ N \trianglelefteq_i S \Rightarrow {}^{S}/_{\rho_N} \in \mathcal{F}$;
2) $N_1, N_2 \trianglelefteq_i S,\ N_1 \cap N_2 = E(S)$ e ${}^{S}/_{\rho_{N_i}} \in \mathcal{F},\ i \in \{1,2\} \Rightarrow S \in \mathcal{F}$.

ie-Variedades

Definição: Uma classe de semigrupos R-unipotentes $\mathcal{V}$ diz-se uma **ie-variedade** se:

✓Se $S \in \mathcal{V}$ e T subsemigrupo **regular** de S, então $T \in \mathcal{V}$;

✓Se $S \in \mathcal{V}$ e $\theta\colon\ S \twoheadrightarrow T$ é um morfismo sobrejetivo que **separa idempotentes**, então $T \in \mathcal{V}$;

✓Se S é produto direto de $S_1, \dots, S_n$ tal que $S_i \in \mathcal{V},\ i \in \{1, \dots, n\}$, então $S \in \mathcal{V}$.

Propriedades dos Quocientes

- **Proposição:** Sejam S um semigrupo R-unipotente e $T, N \trianglelefteq_i$ S. Então,

$$T/\rho_{T\cap N} \cong TN/\rho_N$$

- **Proposição:** Sejam S um semigrupo R-unipotente e $N \trianglelefteq_i S$.

$$R \trianglelefteq_i S/\rho_N \Rightarrow \exists T \trianglelefteq_i S: N \subseteq T \; e \; R = T/\rho_N\,.$$

De uma classe de inversos a uma classe de R-unipotentes

- Menor congruência de semigrupos inversos: S semigrupo R-unipotente. Dados $a, b \in S$

$$a\gamma b \Leftrightarrow V(a) = V(b)$$

- **Lema :** Seja S um semigrupo R-unipotente. Dados $a, b \in S$

$$a\gamma b \Leftrightarrow \exists x \in V(a) \cap V(b)$$

De uma classe de inversos a uma classe de R-unipotentes

- $\mathcal{Inv}$ classe de todos os semigrupos inversos;
- $\mathcal{R}_{\mathcal{F}} = \{$S semigrupo R–unipotente $: {}^{S}/_{\gamma} \in \mathcal{F}\}$, onde $\mathcal{F}$ é uma classe se semigrupos inversos.
- **Proposição:** Seja $\mathcal{F}$ uma classe se semigrupos inversos. Então,

  a) $\mathcal{F} = \mathcal{R}_{\mathcal{F}} \cap \mathcal{Inv}$;

  b) $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ e-formação de semigrupos R-unipotentes $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ formação de semigrupos inversos;

  c) $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ e-variedade de semigrupos R-unipotentes $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ variedade de semigrupos inversos.

? $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ e-variedade de semigrupos R-unipotentes $\Leftarrow$ $\mathcal{F}$ variedade de semigrupos inversos ?

De uma classe de inversos a uma classe de R-unipotentes

? $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ e-variedade de semigrupos R-unipotente $\Leftarrow$ $\mathcal{F}$ variedade de semigrupos inversos ?

- Seja $S \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ e T subsemigrupo regular de S.
  - ☑ Se $V(t) \subseteq T, \forall t \in T$
  - ☑ Se T for cheio
  - ☐ Caso geral ???

Produto de classes de semigrupos

- Sejam $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ classes de semigrupos R-unipotentes. Definimos o produto de classes, $\mathcal{X}\mathcal{Y}$, como:

$$\mathcal{X}\mathcal{Y} = \{\mathrm{S \text{ semigrupo } R\text{–}unipotente} : \exists \mathrm{N} \trianglelefteq_{\mathrm{i}} \mathrm{S} : \mathrm{N} \in \mathcal{X} \text{ e } {}^{\mathrm{S}}/_{\rho_{\mathrm{N}}} \in \mathcal{Y}\}$$

- **Proposição:** Sejam $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ e $\mathcal{Z}$ classes de semigrupos R-unipotentes. Então

$$\mathcal{X}(\mathcal{Y}\mathcal{Z}) \subseteq (\mathcal{X}\mathcal{Y})\mathcal{Z}$$

Produto de classes de semigrupos

- **Proposição:** Sejam $\mathcal{V}_1$ e $\mathcal{V}_2$ ie-variedades de semigrupos R-unipotentes. Então $\mathcal{V}_1\mathcal{V}_2$ é uma ie-variedade de semigrupos R-unipotentes.

? Produto de ie-formações de semigrupos R-unipotente é uma ie-formação de semigrupos R-unipotentes ? **Não!**

Produto de classes de semigrupos

- Maior congruência em S que separa idempotentes:

$$a\mu b \Leftrightarrow aea' = beb', \forall e = e^2, \text{para alguns } a' \in V(a),\ b' \in V(b)$$

Relembrar:

$$aea' = aea'', \forall a', a'' \in V(a)$$

S semigrupo R-unipotente **fundamental**: $\mu = 1_S$

Produto de classes de semigrupos

- **Proposição:** A classe de todos os semigrupos R-unipotentes fundamentais forma uma ie-formação.

- **Definição:** Uma classe de semigrupos R-unipotentes diz-se uma fe-formação se é uma ie-formação e contém todos os semigrupos R-unipotentes fundamentais.

- **Definição:** Sejam $\mathcal{F}$ uma fe-formação e S um semigrupo R-unipotente. Define-se $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ **−residual** de S, $S^{\mathcal{F}}$, como sendo o menor N $\trianglelefteq_{\mathrm{i}}$ S tal que ${}^{S}/_{\rho_N} \in \mathcal{F}$.

Produto de classes de semigrupos

- **Proposição:** Seja $\mathcal{F}$ uma fe -formação e seja $\theta: S \twoheadrightarrow W$ um morfismo sobrejetivo de semigrupos R-unipotentes que separa idempotentes. Temos que

$$W^{\mathcal{F}} = (S^{\mathcal{F}})\theta$$

- **Proposição:** Seja $\mathcal{F}$ uma fe -formação e S um semigrupo R-unipotente. Se $N \trianglelefteq_i S$ então,

$$\left(S/\rho_N\right)^{\mathcal{F}} = S^{\mathcal{F}}N/\rho_N$$

Produto de classes de semigrupos

- **Definição:** Sejam $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ fe-formações de semigrupos R-unipotentes. Definimos o produto de fe-formações da seguinte forma:

$$\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2 = \left(S\colon S^{\mathcal{F}_2} \in \mathcal{F}_1\right)$$

- **Proposição:** Sejam $\mathcal{F}$ uma fe-formação e S um semigrupo R-unipotente. Então,

$$S^{\mathcal{F}} = E(S) \Leftrightarrow S \in \mathcal{F}$$

Produto de classes de semigrupos

- **Proposição:** Sejam $\mathcal{F}$ uma fe-formação e S um semigrupo R-unipotente. Temos que

$$S^{\mathcal{F}} = \cap \{N \trianglelefteq_i S : {}^{S}/_{\rho_N} \in \mathcal{F}\}$$

- **Proposição:** Sejam $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, e $\mathcal{F}_3$ fe-formações de R-unipotentes. Então:

  1) $\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1\mathcal{F}_2$;
  2) $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$;
  3) Se $\mathcal{F}_1$ é fechado para subsemigrupos i-normais, então $\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1\mathcal{F}_2$;
  4) Se $\mathcal{F}_1$ é fechado para subsemigrupos i-normais, então $\mathcal{F}_1 \circ (\mathcal{F}_2 \circ \mathcal{F}_3) \subseteq (\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2) \circ \mathcal{F}_3$.

Produto de classes de semigrupos

- **Teorema:** Sejam $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ fe-formações de R-unipotentes. Então, $\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$ é uma fe-formação.

Dem: Seja $\mathcal{F}und$ o conjunto de todos os semigrupos R-unipotentes fundamentais. Comecemos por observar que

$$\mathcal{F}und \subseteq \mathcal{F}_2 \underset{por\ 2.}{\subseteq} \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$$

Portanto, precisamos de mostrar que $\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$ é uma ie-formação.

Seja $\theta\colon S \twoheadrightarrow T$ um morfismo sobrejetivo que separa idempotentes e tal que $S \in \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$.

Ora, como $S^{\mathcal{F}_2} \in \mathcal{F}_1$ e, pela proposição ao lado, $(S^{\mathcal{F}_2})\theta = T^{\mathcal{F}_2}$. Segue então que $T^{\mathcal{F}_2} \in \mathcal{F}_1$.

Relembrar:

$\mathcal{F}$ fe –formação; $\theta\colon S \twoheadrightarrow W$ morfismo sobrejetivo que separa idempotentes.

$$W^{\mathcal{F}} = (S\theta)^{\mathcal{F}} = S^{\mathcal{F}}$$

Produto de classes de semigrupos

Sejam agora $N_1,\ N_2 \trianglelefteq_i S$ semigrupos R-unipotentes tal que $N_1 \cap N_2 = E(S)$ e $S/\rho_{N_i} \in \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$.

Pelas proposições ao lado,

$$S^{\mathcal{F}_2}/\rho_{S^{\mathcal{F}_2} \cap N_i} \cong S^{\mathcal{F}_2}N_i/\rho_{N_i} = \left(S/\rho_{N_i}\right)^{\mathcal{F}_2} \in \mathcal{F}_1$$

Temos que,

- $\left(S^{\mathcal{F}_2} \cap N_1\right) \cap \left(S^{\mathcal{F}_2} \cap N_2\right) = S^{\mathcal{F}_2} \cap (N_1 \cap N_2) = S^{\mathcal{F}_2} \cap E(S) \underset{E(S) \subseteq S^{\mathcal{F}_2}}{=} E(S);$
- $S^{\mathcal{F}_2} \cap N_i \trianglelefteq_i S^{\mathcal{F}_2};$
- $\mathcal{F}_1$ fe-formação.

Então,

$$S^{\mathcal{F}_2} \in \mathcal{F}_1 \Longrightarrow S \in \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2$$

$\therefore \mathcal{F}$ ie–formação.

$\therefore\ \mathcal{F}\ fe$–formação .

Relembrar:

S semigrupo R-unipotente; $T, N \trianglelefteq_i S$. Então,

$$T/\rho_{T \cap N} \cong TN/\rho_N$$

Relembrar:

$\mathcal{F}$ fe-formação; S semigrupo R-unipotente. Se $\mathrm{N} \trianglelefteq_{\mathrm{i}} \mathrm{S}$ então,

$$\left(\mathrm{S}/\rho_{\mathrm{N}}\right)^{\mathcal{F}} = \mathrm{S}^{\mathcal{F}}\mathrm{N}/\rho_{\mathrm{N}}$$

O que ficou por provar...

? $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ e-variedade de semigrupos R-unipotente $\Leftarrow \mathcal{F}$ variedade de semigrupos inversos ?

? $\mathcal{F}_1 \circ (\mathcal{F}_2 \circ \mathcal{F}_3) = (\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_2) \circ \mathcal{F}_3$?

Seja $\mathcal{R}$ uma classe de semigrupos R-unipotentes e $\mathcal{W} = \{S$ semigrupo inverso $: \exists R \in \mathcal{R}\colon S \cong {}^{R}/_{\gamma}\}$

a) $\mathcal{R}$ e-formação de semigrupos R-unipotentes $\Rightarrow$ $\mathcal{W}$ formação de semigrupos inversos?

b) $\mathcal{R}$ ie-formação de semigrupos R-unipotentes $\Rightarrow$ $\mathcal{W}$ i-formação de semigrupos inversos?

? Generalizar alguns destes resultados para outras classes de semigrupos ortodoxos ?

Bibliografia

1) J. M. Howie. *Fundamentals of Semigroup Theory*. Oxford University Press, 1995;

2) M.J.J. Branco, G.M.S. Gomes, J.E. Pin e X. Soler-Escrivà. *“On formations of monoids”*. J. Pure Appl. Algebra 224(11):106401;

3) G.M.S. Gomes e I.J. Nobre. *“On formations of inverse semigroups”*. [Em preparação];

4) M.J.J. Branco e G.M.S. Gomes. *"The generalized Szendrei expansion of an R-unipotent semigroups"*. In: Acta Math Hung

5) Hall, T. (1989). *Identities for existence varieties of regular semigroups*. In: Bull. Aust. Math. Soc, 40(1), 59-77;

6) Jones, P. (1987). *Mal'cev products of varieties of completely regular semigroups*. Bull. Aust. Math. Soc. Series A. Pure Mathematics and Statistics, 42(2), 227-246;

7) Doyle, J. (1995). *On existence varieties of orthodox semigroups*. In: Bull. Aust. Math. Soc. Series A. Pure Mathematics and Statistics, 58(1), 100-125;

8) Bolinches, A. B. e Ezquerro, L.M.. *Classes of Finite Groups*. Springer Netherlands, 2006.

9) Robinson D.J.S. (1996) *Finite Soluble Groups*. In: A Course in the Theory of Groups. Graduate Texts in Mathematics, vol 80. Springer, NY.

10) Gomes, G.M.S. Orthodox congruences on regular semigroups. Semigroup Forum 37, 149–166 (1988).