V espaço vetorialmente finitamente gerado

Uma base ordenada para V é uma sucessão finita $(v_1, \dots, v_n)$ de elementos de V cujos constituintes formam uma base (isto é, $\{v_1, \dots, v_n\}$ é um conjunto linearmente independente que gera V)

(Muitos vezes quando escrevemos $\{v_1, \dots, v_n\}$ já estamos a assumir uma ordem nos vetores. No entanto, se formos precisos não há qualquer diferença entre os conjuntos $\{v_1, v_2\}$ e $\{v_2, v_1\}$ pelo que isto pode levar a confusão.)

Uma base ordenada determina uma correspondência bijetiva

$$V \longleftrightarrow \mathbb{K}^n$$
$$v \longleftrightarrow (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \text{coordenadas de } V \text{ na base ordenada } B = (v_1, \dots, v_n)$$
$$= \text{únicos escalares } \alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ tais que } v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

Vamos ver como se relacionam as coordenadas em duas bases diferentes $B_1 = (v_1, \dots, v_n)$ e $B_2 = (w_1, \dots, w_n)$ [note-se que duas bases têm o mesmo número de elementos $n = \dim V$]

Seja (*) $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ (portanto as coordenadas de v na base B_1 são $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$)

Para obtermos as coordenadas de v na base B_2 podemos escrever os vetores v_i na base B_2:

$$v_1 = a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \dots + a_{n1} w_n$$
$$v_2 = a_{12} w_1 + a_{22} w_2 + \dots + a_{n2} w_n$$
$$\vdots$$
$$v_n = a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \dots + a_{nn} w_n$$

(portanto $(a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni})$ são as coordenadas de v_i na base B_2)

Substituindo em (*) obtemos

$$v = \alpha_1 (a_{11} w_1 + a_{21} w_2 + \dots + a_{n1} w_n) + \dots + \alpha_n (a_{1n} w_1 + a_{2n} w_2 + \dots + a_{nn} w_n)$$
$$= \overbrace{(\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \dots + \alpha_n a_{1n})}^{\beta_1} w_1 + \dots + \overbrace{(\alpha_1 a_{n1} + \alpha_2 a_{n2} + \dots + \alpha_n a_{nn})}^{\beta_n} w_n$$

coordenadas de v na base B_2

Em notação matricial a expressão anterior escreve-se

coords na base B_2
$$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{\text{matriz de mudança de coordenadas } S_{B_1 \to B_2}} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

as coords do vetor v_i da base antiga na nova base aparecem na coluna i da matriz $\begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$

Prop: Sejam $B_1 = (v_1, \dots, v_n)$ e $B_2 = (w_1, \dots, w_n)$ bases de um espaço vetorial V. Existe uma única matriz $n \times n$ $S_{B_1 \to B_2}$ tal que, para todo o vetor $v \in V$, as coordenadas $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de v na base B_1 e as coordenadas $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ de v na base B_2 estão relacionadas pela equação

(*) $$\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = S_{B_1 \to B_2} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$

(*) A matriz obtém-se escrevendo na i-ésima coluna as coordenadas do i-ésimo vetor da base B_1 na base B_2.

Dem:
Existência já foi explicada acima.
Unicidade: Aplicando a fórmula (*) ao vetor $v = v_i$ (i-ésimo vetor da base B_1), que tem coordenadas $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (1 na posição i)

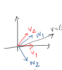
obtemos que as coordenadas de v_i na base B_2 são

$$S_{B_1 \to B_2} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \text{i-ésima coluna de } S_{B_1 \to B_2}$$

logo a matriz é única e obtém-se como indicado em (*) □

Exemplo: Vamos obter as matrizes de mudança de base que relacionam as bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$

$$B_1 = (\underbrace{(1,0)}_{v_1}, \underbrace{(1,1)}_{v_2}) \quad e \quad B_2 = (\underbrace{(1,1)}_{w_1}, \underbrace{(1,-1)}_{w_2}):$$



$$v_1 = (1,0) = \frac{1}{2} \overbrace{(1,1)}^{w_1} + \frac{1}{2} \overbrace{(1,-1)}^{w_2}$$
$$v_2 = (1,1) = 1 \cdot \underbrace{(1,1)}_{w_1} + 0 \cdot \underbrace{(1,-1)}_{w_2}$$

logo $S_{B_1 \to B_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ (coords de v_1 na nova base)

Por exemplo o vetor $v = (2,1) \in \mathbb{R}^2$ que tem coords $(1,1)$ na base B_1 ($v = v_1 + v_2$) tem coordenadas

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}}_{S_{B_1 \to B_2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$(3/2, 1/2)$ na base B_2

Proposição: Sejam B_1, B_2, B_3 bases finitas de V. Então

(0) $S_{B_1 \to B_1} = I$

(1) $S_{B_1 \to B_3} = S_{B_2 \to B_3} S_{B_1 \to B_2}$

(2) $S_{B_2 \to B_1} = (S_{B_1 \to B_2})^{-1}$

Dem: Estas relações seguem da unicidade da matriz de mudança de base. Seja $v \in V$ um vetor e $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $(\beta_1, \dots, \beta_n)$, $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ as coordenadas de v nas bases B_1, B_2 e B_3 respetivamente.
Vamos por exemplo ver (1) deixando as restantes afirmações como exercícios.

Por definição $S_{B_1 \to B_3}$ é a única matriz que verifica

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = S_{B_1 \to B_3} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad \text{para todos os vetores } v.$$

Mas $$S_{B_2 \to B_3} S_{B_1 \to B_2} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = S_{B_2 \to B_3} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix}$$

logo $S_{B_2 \to B_3} S_{B_1 \to B_2}$ também satisfaz a relação

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = S_{B_2 \to B_3} S_{B_1 \to B_2} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

A unicidade implica então que $S_{B_1 \to B_3} = S_{B_2 \to B_3} S_{B_1 \to B_2}$. □